

中学数学

方程式

応用編

偏差値 55 以上を目指す入試応用対策

一次方程式・連立方程式・二次方程式を組み合わせ、
入試で差がつく文章題・条件整理・融合問題まで練習します。

目次

1	この教材の使い方	2
2	一次方程式の応用	3
2.1	割合を含む方程式	3
2.2	速さと時間の応用	5
3	連立方程式の応用	8
3.1	条件を2本の式にする	8
3.2	食塩水の問題	11
4	二次方程式の応用	14
4.1	面積から方程式を作る	14
4.2	整数条件と二次方程式	17
5	関数と方程式の融合	19
5.1	一次関数との交点	19
5.2	二次関数との交点	21
6	入試大問につながる問題	24
6.1	条件を選んで式を作る	24
6.2	整数の条件を使う	27
7	単元まとめ練習問題	29
7.1	問題	29
7.2	解答解説	30
8	学習チェックリスト	35
9	まとめ	36

1 この教材の使い方

この教材は、方程式の基本を一通り学習した人が、高校入試で差がつく応用問題に対応するための教材です。計算だけでなく、**条件を読み取る力、どの方程式を使うかを選ぶ力**を重視します。

学習の進め方

1. まず「ポイント」で、応用問題で使う見方を確認します。
2. 例題では、「方針」で式を立てる前の考え方を確認します。
3. 練習問題では、途中式と単位を書き、条件に合っているか確認します。
4. 最後のまとめ練習問題で、一次方程式・連立方程式・二次方程式の使い分けを確認します。

注意 応用編で大切にすること

応用問題では、計算よりも先に、**何を文字でおくか**を決めることが大切です。文章の中の条件を整理し、等しい関係や変化する量を見つけてから式を作りましょう。

2 一次方程式の応用

2.1 割合を含む方程式

割合は小数または分数に直す

割合の問題では、20% を 0.2、15% を 0.15 のように直します。定価・割引・利益の問題では、**もとの量を文字でおく**と式を作りやすくなります。

例題 1

ある品物を定価の 20%引きで売ったところ、売値は 2400 円でした。この品物の定価を求めなさい。

方針

定価を x 円とします。20%引きは、定価の 80%で売るという意味です。

解き方

定価を x 円とします。

20%引きなので、売値は定価の 80%です。

$$0.8x = 2400$$

両辺を 0.8 で割ります。

$$x = 2400 \div 0.8 = 3000$$

答え

3000 円

練習問題 1

ある品物を定価の 15%引きで売ったところ、売値は 3400 円でした。この品物の定価を求めなさい。

解答解説 1**解き方**

定価を x 円とします。

15%引きは、定価の 85%で売ることです。

$$0.85x = 3400$$

両辺を 0.85 で割ります。

$$x = 3400 \div 0.85 = 4000$$

答え

4000 円

2.2 速さと時間の応用

時間の単位をそろえる

速さの問題では、**道のり=速さ × 時間**を使います。分と時間が混ざる場合は、先に単位をそろえてから式を作ります。

例題 2

家から図書館まで、行きは分速 60m で歩き、帰りは分速 80m で歩きました。往復で 35 分かかり、道のりは同じです。家から図書館までの道のりを求めなさい。

方針

片道の道のりを x m とします。時間は「道のり ÷ 速さ」で表せます。

解き方

片道の道のりを x m とします。

行きにかかる時間は

$$\frac{x}{60}$$

分です。

帰りにかかる時間は

$$\frac{x}{80}$$

分です。

往復で 35 分なので、

$$\frac{x}{60} + \frac{x}{80} = 35$$

です。

両辺に 240 をかけます。

$$4x + 3x = 8400$$

$$7x = 8400$$

$$x = 1200$$

答え

1200m

練習問題 2

家から駅まで、行きは分速 50m で歩き、帰りは分速 75m で歩きました。往復で 50 分かかりました。家から駅までの道のりを求めなさい。

解答解説 2**解き方**

片道の道のりを x m とします。

行きの時間は $\frac{x}{50}$ 分、帰りの時間は $\frac{x}{75}$ 分です。

$$\frac{x}{50} + \frac{x}{75} = 50$$

両辺に 150 をかけます。

$$3x + 2x = 7500$$

$$5x = 7500$$

$$x = 1500$$

答え

1500m

3 連立方程式の応用

3.1 条件を2本の式にする

2つの条件を見つける

連立方程式の文章題では、2つの文字を使うだけでなく、**2つの条件**を見つけることが大切です。個数の条件、金額の条件、合計の条件、差の条件などを分けて考えます。

例題 3

大人 2 人と子ども 3 人の入場料は 3100 円、大人 3 人と子ども 2 人の入場料は 3900 円です。大人 1 人、子ども 1 人の入場料をそれぞれ求めなさい。

方針

大人 1 人の入場料を x 円、子ども 1 人の入場料を y 円として、2 つの条件から式を作ります。

解き方

大人 1 人を x 円、子ども 1 人を y 円とします。

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3100 \\ 3x + 2y = 3900 \end{cases}$$

1 つ目の式を 3 倍、2 つ目の式を 2 倍します。

$$6x + 9y = 9300$$

$$6x + 4y = 7800$$

上の式から下の式をひきます。

$$5y = 1500$$

$$y = 300$$

$2x + 3y = 3100$ に $y = 300$ を代入します。

$$2x + 900 = 3100$$

$$2x = 2200$$

$$x = 1100$$

答え

大人 1100 円、子ども 300 円

練習問題 3

大人 1 人と子ども 4 人の入場料は 2600 円、大人 3 人と子ども 2 人の入場料は 4200 円です。大人 1 人、子ども 1 人の入場料を求めなさい。

解答解説 3

解き方

大人 1 人を x 円、子ども 1 人を y 円とします。

$$\begin{cases} x + 4y = 2600 \\ 3x + 2y = 4200 \end{cases}$$

1 つ目の式を 3 倍します。

$$3x + 12y = 7800$$

これから $3x + 2y = 4200$ をひきます。

$$10y = 3600$$

$$y = 360$$

$x + 4y = 2600$ に代入します。

$$x + 1440 = 2600$$

$$x = 1160$$

答え

大人 1160 円、子ども 360 円

3.2 食塩水の問題

食塩の量に注目する

食塩水の問題では、全体の量ではなく、**食塩の量**を式にします。食塩の量は「食塩水の量 × 濃度」で求めます。

例題 4

5%の食塩水と 12%の食塩水を混ぜて、10%の食塩水を 350g 作ります。5%の食塩水と 12%の食塩水をそれぞれ何 g 混ぜればよいですか。

方針

5%の食塩水を x g、12%の食塩水を y g とします。全体の量と食塩の量で式を作ります。

解き方

5%の食塩水を x g、12%の食塩水を y g とします。

全体の量から、

$$x + y = 350$$

です。

食塩の量から、

$$0.05x + 0.12y = 0.10 \times 350$$

$$0.05x + 0.12y = 35$$

です。

$x = 350 - y$ を代入します。

$$0.05(350 - y) + 0.12y = 35$$

$$17.5 - 0.05y + 0.12y = 35$$

$$0.07y = 17.5$$

$$y = 250$$

したがって、

$$x = 100$$

です。

答え

5%の食塩水 100g、12%の食塩水 250g

練習問題 4

4%の食塩水と 10%の食塩水を混ぜて、8%の食塩水を 300g 作ります。それぞれ何 g 混ぜればよいですか。

解答解説 4

解き方

4%の食塩水を x g、10%の食塩水を y g とします。

$$x + y = 300$$

食塩の量から、

$$0.04x + 0.10y = 0.08 \times 300$$

$$0.04x + 0.10y = 24$$

$x = 300 - y$ を代入します。

$$0.04(300 - y) + 0.10y = 24$$

$$12 - 0.04y + 0.10y = 24$$

$$0.06y = 12$$

$$y = 200$$

よって、

$$x = 100$$

です。

答え

4%の食塩水 100g、10%の食塩水 200g

4 二次方程式の応用

4.1 面積から方程式を作る

図形問題は長さを文字でおく

面積を使う問題では、横や縦の長さを文字でおきます。長方形や正方形では、**面積 = 縦 × 横**から二次方程式を作ることがあります。

例題 5

縦が横より 3cm 短い長方形があります。面積が 70cm^2 のとき、横の長さを求めなさい。

方針

横の長さを $x\text{cm}$ とします。縦は $x - 3\text{cm}$ と表せます。

解き方

横の長さを $x\text{cm}$ とします。

縦は横より 3cm 短いので、

$$x - 3$$

cm です。

面積が 70cm^2 なので、

$$x(x - 3) = 70$$

です。

整理します。

$$x^2 - 3x - 70 = 0$$

因数分解します。

$$(x - 10)(x + 7) = 0$$

したがって、

$$x = 10, x = -7$$

です。

長さは正の数なので、 $x = -7$ は適しません。

答え

10cm

練習問題 5

縦が横より 4cm 短い長方形があります。面積が 96cm^2 のとき、横の長さを求めなさい。

解答解説 5**解き方**

横の長さを x cm とします。縦は $x - 4$ cm です。

$$x(x - 4) = 96$$

整理します。

$$x^2 - 4x - 96 = 0$$

因数分解します。

$$(x - 12)(x + 8) = 0$$

よって、

$$x = 12, \quad x = -8$$

です。長さは正なので、 $x = 12$ を使います。

答え

12cm

4.2 整数条件と二次方程式

連続する整数を文字で表す

連続する整数は、 x 、 $x + 1$ 、 $x + 2$ のように表します。条件を式にすると二次方程式になることがあります。

例題 6

連続する 2 つの正の整数があります。その積が 132 です。この 2 つの整数を求めなさい。

方針

小さい方の整数を x とします。大きい方は $x + 1$ です。

解き方

小さい方を x とします。

大きい方は $x + 1$ です。

積が 132 なので、

$$x(x + 1) = 132$$

です。

整理します。

$$x^2 + x - 132 = 0$$

因数分解します。

$$(x - 11)(x + 12) = 0$$

したがって、

$$x = 11, \quad x = -12$$

です。

正の整数なので、 $x = 11$ です。

答え

11 と 12

練習問題 6

連続する 2 つの正の整数があります。その積が 210 です。この 2 つの整数を求めなさい。

解答解説 6**解き方**

小さい方を x とします。大きい方は $x + 1$ です。

$$x(x + 1) = 210$$

整理します。

$$x^2 + x - 210 = 0$$

因数分解します。

$$(x - 14)(x + 15) = 0$$

正の整数なので、

$$x = 14$$

です。

答え

14 と 15

5 関数と方程式の融合

5.1 一次関数との交点

交点は連立方程式で求める

2つのグラフの交点は、両方の式を同時に満たす点です。そのため、**連立方程式**を使って座標を求めます。

例題 7

直線 $y = 2x + 1$ と直線 $y = -x + 7$ の交点の座標を求めなさい。

方針

交点では2つの y の値が等しいので、 $2x + 1 = -x + 7$ とします。

解き方

交点では、

$$2x + 1 = -x + 7$$

です。

両辺に x をたします。

$$3x + 1 = 7$$

両辺から 1 をひきます。

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

$x = 2$ を $y = 2x + 1$ に代入します。

$$y = 2 \times 2 + 1 = 5$$

答え

$$(2, 5)$$

練習問題 7

直線 $y = 3x - 2$ と直線 $y = -x + 6$ の交点の座標を求めなさい。

解答解説 7

解き方

交点では、

$$3x - 2 = -x + 6$$

です。

両辺に x をたします。

$$4x - 2 = 6$$

両辺に 2 をたします。

$$4x = 8$$

$$x = 2$$

$y = 3x - 2$ に代入します。

$$y = 3 \times 2 - 2 = 4$$

答え

$$(2, 4)$$

5.2 二次関数との交点

二次関数との交点は二次方程式になる

二次関数と直線の交点では、2つの y を等しくします。すると、**二次方程式**が現れることがあります。

例題 8

放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x + 2$ の交点の座標をすべて求めなさい。

方針

交点では $x^2 = x + 2$ です。二次方程式を解き、 y 座標を求めます。

解き方

交点では、

$$x^2 = x + 2$$

です。

すべて左辺に移します。

$$x^2 - x - 2 = 0$$

因数分解します。

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

したがって、

$$x = 2, \quad x = -1$$

です。

$y = x + 2$ に代入します。

$x = 2$ のとき、

$$y = 4$$

です。

$x = -1$ のとき、

$$y = 1$$

です。

答え

$$(2, 4), \quad (-1, 1)$$

練習問題 8

放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 2x + 3$ の交点の座標をすべて求めなさい。

解答解説 8

解き方

交点では、

$$x^2 = 2x + 3$$

です。

整理します。

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

因数分解します。

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

したがって、

$$x = 3, \quad x = -1$$

です。

$y = 2x + 3$ に代入します。

$x = 3$ のとき、 $y = 9$ です。

$x = -1$ のとき、 $y = 1$ です。

答え

$$(3, 9), \quad (-1, 1)$$

6 入試大問につながる問題

6.1 条件を選んで式を作る

使う条件を整理する

大問では条件が多く書かれています。すべてを一度に使おうとせず、まず**求めたいもの**に**関係する条件**を選びます。

例題 9

ある数 x を 3 倍して 5 をたした数と、 x に 17 をたした数が等しくなりました。このとき、 x の値を求めなさい。また、その等しい値も求めなさい。

方針

「3 倍して 5 をたした数」と「17 をたした数」をそれぞれ式にし、等しいとおきます。

解き方

ある数を x とします。

3 倍して 5 をたした数は、

$$3x + 5$$

です。

x に 17 をたした数は、

$$x + 17$$

です。

これらが等しいので、

$$3x + 5 = x + 17$$

です。

両辺から x をひきます。

$$2x + 5 = 17$$

両辺から 5 をひきます。

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

等しい値は、

$$3 \times 6 + 5 = 23$$

です。

答え

$$x = 6, \quad \text{等しい値は} 23$$

練習問題 9

ある数 x を 4 倍して 3 をひいた数と、 x に 18 をたした数が等しくなりました。 x の値と、その等しい値を求めなさい。

解答解説 9

解き方

条件から、

$$4x - 3 = x + 18$$

です。

両辺から x をひきます。

$$3x - 3 = 18$$

両辺に 3 をたします。

$$3x = 21$$

$$x = 7$$

等しい値は、

$$4 \times 7 - 3 = 25$$

です。

答え

$$x = 7, \quad \text{等しい値は} 25$$

6.2 整数の条件を使う

範囲と整数条件を同時に使う

整数を求める問題では、方程式で候補を出したあと、範囲や整数条件に合うか確認します。最後に**問題文の条件に戻って確認**しましょう。

例題 10

整数 x について、 $x^2 - 5x - 24 = 0$ を満たし、さらに $x > 0$ であるものを求めなさい。

方針

まず二次方程式を解きます。そのあと、 $x > 0$ という条件に合うものだけを選びます。

解き方

二次方程式を因数分解します。

$$x^2 - 5x - 24 = 0$$

$$(x - 8)(x + 3) = 0$$

したがって、

$$x = 8, \quad x = -3$$

です。

このうち、 $x > 0$ を満たすのは $x = 8$ です。

答え

$$x = 8$$

練習問題 10

整数 x について、 $x^2 - 2x - 15 = 0$ を満たし、さらに $x < 0$ であるものを求めなさい。

解答解説 10

解き方

因数分解します。

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$(x - 5)(x + 3) = 0$$

したがって、

$$x = 5, \quad x = -3$$

です。

このうち、 $x < 0$ を満たすのは $x = -3$ です。

答え

$$x = -3$$

7 単元まとめ練習問題

ここでは、方程式の応用問題をまとめて確認します。何を文字でおくかを先に決め、条件を式にしてから計算しましょう。

7.1 問題

練習問題 まとめ 1

ある品物を定価の 25%引きで売ったところ、売値は 3000 円でした。定価を求めなさい。

練習問題 まとめ 2

片道の道のを、行きは分速 70m、帰りは分速 105m で移動したところ、往復で 40 分かかりました。片道の道のを求めなさい。

練習問題 まとめ 3

大人 2 人と子ども 1 人の入場料は 2500 円、大人 1 人と子ども 3 人の入場料は 2700 円です。大人 1 人、子ども 1 人の入場料を求めなさい。

練習問題 まとめ 4

3%の食塩水と 9%の食塩水を混ぜて、7%の食塩水を 240g 作ります。それぞれ何 g 混ぜればよいですか。

練習問題 まとめ 5

縦が横より 5cm 短い長方形の面積が 150cm^2 です。横の長さを求めなさい。

練習問題 まとめ 6

放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x + 6$ の交点の座標をすべて求めなさい。

7.2 解答解説

解答解説 まとめ 1

解き方

定価を x 円とします。25%引きは 75%で売ることです。

$$0.75x = 3000$$

$$x = 4000$$

答え

4000 円

解答解説 まとめ 2

解き方

片道の道のりを x m とします。

$$\frac{x}{70} + \frac{x}{105} = 40$$

両辺に 210 をかけます。

$$3x + 2x = 8400$$

$$5x = 8400$$

$$x = 1680$$

答え

1680m

解答解説 まとめ 3

解き方

大人 1 人を x 円、子ども 1 人を y 円とします。

$$\begin{cases} 2x + y = 2500 \\ x + 3y = 2700 \end{cases}$$

1 つ目の式から $y = 2500 - 2x$ です。

これを 2 つ目の式に代入します。

$$x + 3(2500 - 2x) = 2700$$

$$x + 7500 - 6x = 2700$$

$$-5x = -4800$$

$$x = 960$$

$2x + y = 2500$ に代入します。

$$1920 + y = 2500$$

$$y = 580$$

答え

大人 960 円、子ども 580 円

解答解説 まとめ 4

解き方

3%の食塩水を x g、9%の食塩水を y g とします。

$$x + y = 240$$

食塩の量から、

$$0.03x + 0.09y = 0.07 \times 240$$

$$0.03x + 0.09y = 16.8$$

$x = 240 - y$ を代入します。

$$0.03(240 - y) + 0.09y = 16.8$$

$$7.2 + 0.06y = 16.8$$

$$0.06y = 9.6$$

$$y = 160$$

よって、 $x = 80$ です。

答え

3%の食塩水 80g、9%の食塩水 160g

解答解説 まとめ 5**解き方**

横を x cm とすると、縦は $x - 5$ cm です。

$$x(x - 5) = 150$$

整理します。

$$x^2 - 5x - 150 = 0$$

因数分解します。

$$(x - 15)(x + 10) = 0$$

長さは正なので、 $x = 15$ です。

答え

15cm

解答解説 まとめ 6**解き方**

交点では、

$$x^2 = x + 6$$

です。

整理します。

$$x^2 - x - 6 = 0$$

因数分解します。

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

したがって、

$$x = 3, \quad x = -2$$

です。

$y = x + 6$ に代入します。

$x = 3$ のとき、 $y = 9$ です。

$x = -2$ のとき、 $y = 4$ です。

答え

$$(3, 9), \quad (-2, 4)$$

8 学習チェックリスト

次の項目を確認し、できるようになったものにチェックを入れましょう。

チェックリスト

- 割合を小数や分数に直して方程式を作れる。
- 速さ・時間・道のりの関係から式を作れる。
- 連立方程式で2つの条件を式にできる。
- 食塩水の問題で、食塩の量に注目できる。
- 図形の面積から二次方程式を作れる。
- 整数条件を使って、答えとして適するものを選べる。
- 関数の交点を方程式で求められる。
- 問題文の条件に戻って、答えが合っているか確認できる。

9 まとめ

方程式・応用編の重要ポイント

- 応用問題では、まず何を文字でおくかを決める。
- 割合・速さ・食塩水では、単位や割合の表し方をそろえる。
- 連立方程式では、2つの文字と2つの条件を整理する。
- 二次方程式では、面積や整数条件から式を作ることがある。
- 関数の交点は、2つの式を同時に満たす点として考える。
- 最後に、求めた答えが問題文の条件に合っているか確認する。

次に取り組むこと

方程式の応用問題が安定してきたら、乗法公式と因数分解に進みましょう。二次方程式や関数の問題では、因数分解の力が大切になります。