

中学数学

乗法公式と因数分解

応用編

偏差値 55 以上を目指す入試応用対策

式の形を見抜き、展開・因数分解・式の値・証明へつなげる力を、
高校入試の応用問題で使える形まで練習します。

目次

| | | |
|-----|----------------|----|
| 1 | この教材の使い方 | 2 |
| 2 | 式の形を見抜く展開 | 3 |
| 2.1 | 置き換えて公式を使う | 3 |
| 2.2 | 差の積で計算を短くする | 5 |
| 3 | 因数分解の応用 | 8 |
| 3.1 | 置き換えて因数分解する | 8 |
| 3.2 | 共通因数を先にくくる | 9 |
| 4 | 係数が1でない因数分解 | 12 |
| 4.1 | 組み合わせを探す | 12 |
| 4.2 | 符号を含む因数分解 | 13 |
| 5 | 式の値と計算の工夫 | 16 |
| 5.1 | 条件を使って式の値を求める | 16 |
| 5.2 | 差の平方を使う | 17 |
| 6 | 証明につながる式の変形 | 20 |
| 6.1 | 整数の性質を示す | 20 |
| 6.2 | 図形の面積を式で表す | 21 |
| 7 | 入試大問につながる応用例題 | 24 |
| 7.1 | 因数分解を使って方程式を解く | 24 |
| 7.2 | 条件から式を作る | 26 |
| 8 | 単元まとめ練習問題 | 29 |
| 8.1 | 問題 | 29 |
| 8.2 | 解答解説 | 30 |
| 9 | 学習チェックリスト | 35 |
| 10 | まとめ | 36 |

1 この教材の使い方

この教材は、乗法公式と因数分解の標準計算をひと通り学習した人が、入試で差がつく問題に対応するための応用教材です。公式を覚えるだけでなく、**式の形を見て方針を選ぶ力**を身につけます。

学習の進め方

1. まず、ポイントで応用問題で使う見方を確認します。
2. 例題では、「方針」を読んでから解き方を確認します。
3. 練習問題では、どの公式を使ったかを途中式に残します。
4. 最後のまとめ練習問題で、展開・因数分解・式の値・証明を混ぜて確認します。

注意 この教材で大切にすること

応用問題では、最初から展開するとは限りません。**展開した方がよい式と、因数分解した方がよい式**を見分けることが大切です。式をすぐ計算せず、まず形を観察しましょう。

2 式の形を見抜く展開

2.1 置き換えて公式を使う

かたまりを 1 つの文字のように見る

複雑な式でも、同じかたまりが何度も出てくるときは、**かたまりを 1 つの文字のように見る**と公式を使いやすくなります。

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

のように、 A や B に式が入ると考えます。

例題 1

次の式を展開しなさい。

$$(2x - 3y + 1)^2$$

方針

$2x - 3y$ を 1 つのかたまりと見て、平方の公式を使います。

解き方

$A = 2x - 3y$ と見ると、

$$(2x - 3y + 1)^2 = (A + 1)^2$$

です。

平方の公式を使うと、

$$(A + 1)^2 = A^2 + 2A + 1$$

です。

ここで、

$$A^2 = (2x - 3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

だから、

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 + 2(2x - 3y) + 1$$

となります。

答え

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 + 4x - 6y + 1$$

練習問題 1

次の式を展開しなさい。

$$(x + 2y - 3)^2$$

解答解説 1**解き方**

$x + 2y$ を 1 つのかたまりと見ます。

$$(x + 2y - 3)^2 = ((x + 2y) - 3)^2$$

平方の公式より、

$$(x + 2y)^2 - 6(x + 2y) + 9$$

です。

$(x + 2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$ なので、

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 12y + 9$$

となります。

答え

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 12y + 9$$

2.2 差の積で計算を短くする**和と差の積を使う**

$(A + B)(A - B)$ の形は、展開をすべて書くよりも、

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

を使うと速く、ミスも減ります。

例題 2

次の式を展開しなさい。

$$(3x + 2y - 5)(3x + 2y + 5)$$

方針

$3x + 2y$ を同じ部分と見て、和と差の積の公式を使います。

解き方

$A = 3x + 2y$ とすると、

$$(3x + 2y - 5)(3x + 2y + 5) = (A - 5)(A + 5)$$

です。

和と差の積より、

$$(A - 5)(A + 5) = A^2 - 25$$

です。

したがって、

$$(3x + 2y)^2 - 25$$

となります。

$(3x + 2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$ なので、

$$9x^2 + 12xy + 4y^2 - 25$$

です。

答え

$$9x^2 + 12xy + 4y^2 - 25$$

練習問題 2

次の式を展開しなさい。

$$(2a - b + 4)(2a - b - 4)$$

解答解説 2**解き方**

$A = 2a - b$ と見ると、

$$(2a - b + 4)(2a - b - 4) = (A + 4)(A - 4)$$

です。

和と差の積より、

$$(A + 4)(A - 4) = A^2 - 16$$

です。

$(2a - b)^2 = 4a^2 - 4ab + b^2$ なので、

$$4a^2 - 4ab + b^2 - 16$$

です。

答え

$$4a^2 - 4ab + b^2 - 16$$

3 因数分解の応用

3.1 置き換えて因数分解する

同じかたまりを見つける

式が複雑に見えても、同じかたまりがくり返し出る場合があります。そのときは、かたまりを一度 A などに置き換えると、因数分解の形が見えやすくなります。

例題 3

次の式を因数分解しなさい。

$$(x+2)^2 - 9$$

方針

$(x+2)^2 - 3^2$ と見て、差の平方の公式を使います。

解き方

$(x+2)$ を 1 つのかたまりと見ると、

$$(x+2)^2 - 9 = (x+2)^2 - 3^2$$

です。

差の平方の公式

$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$$

を使います。

$A = x+2$ 、 $B = 3$ なので、

$$(x+2+3)(x+2-3)$$

となります。

答え

$$(x+5)(x-1)$$

練習問題 3

次の式を因数分解しなさい。

$$(x - 4)^2 - 25$$

解答解説 3

解き方

$(x - 4)^2 - 5^2$ と見ます。

差の平方の公式より、

$$(x - 4 + 5)(x - 4 - 5)$$

です。

それぞれ整理すると、

$$(x + 1)(x - 9)$$

となります。

答え

$$(x + 1)(x - 9)$$

3.2 共通因数を先にくくる

最初に共通因数を見る

因数分解では、まず**全体に共通する因数**がないか確認します。共通因数を残したまま公式を使おうとすると、答えが不完全になりやすいです。

例題 4

次の式を因数分解しなさい。

$$3x^2 - 12x + 12$$

方針

まず共通因数 3 でくくり、そのあと中の式を平方の形で因数分解します。

解き方

すべての項に 3 が共通しているので、

$$3x^2 - 12x + 12 = 3(x^2 - 4x + 4)$$

です。

かっこの中は、

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

です。

答え

$$3(x - 2)^2$$

練習問題 4

次の式を因数分解しなさい。

$$2x^2 + 12x + 18$$

解答解説 4**解き方**

まず共通因数 2 でくくります。

$$2x^2 + 12x + 18 = 2(x^2 + 6x + 9)$$

カッコの中は、

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

です。

答え

$$2(x + 3)^2$$

4 係数が 1 でない因数分解

4.1 組み合わせを探す

積と和を同時に見る

$ax^2 + bx + c$ の因数分解では、先頭の係数と定数項の組み合わせを考えます。展開したときの**真ん中の項**が合うように調整します。

例題 5

次の式を因数分解しなさい。

$$2x^2 + 7x + 3$$

方針

$(2x + \square)(x + \square)$ の形を考え、真ん中の項が $7x$ になるようにします。

解き方

先頭の $2x^2$ から、

$$(2x + \square)(x + \square)$$

の形を考えます。

定数項が 3 なので、入る数の組み合わせは 1 と 3 です。

試すと、

$$(2x + 1)(x + 3)$$

を展開したとき、真ん中の項は

$$6x + x = 7x$$

になります。

答え

$$2x^2 + 7x + 3 = (2x + 1)(x + 3)$$

練習問題 5

次の式を因数分解しなさい。

$$3x^2 + 10x + 3$$

解答解説 5**解き方**

$3x^2$ から、

$$(3x + \square)(x + \square)$$

を考えます。

定数項 3 から、1 と 3 の組み合わせを考えます。

$$(3x + 1)(x + 3)$$

を展開すると、真ん中の項は

$$9x + x = 10x$$

です。

答え

$$3x^2 + 10x + 3 = (3x + 1)(x + 3)$$

4.2 符号を含む因数分解**定数項が負のとき**

定数項が負のときは、2つの数の符号が異なります。真ん中の項の符号に合うように、どちらを正にするかを決めます。

例題 6

次の式を因数分解しなさい。

$$2x^2 - x - 6$$

方針

定数項が負なので、かっこの中に入る数は異符号です。真ん中の項が $-x$ になる組み合わせを探します。

解き方

$2x^2$ から、

$$(2x + \square)(x + \square)$$

を考えます。

定数項が -6 なので、数の組み合わせは異符号になります。

$$(2x + 3)(x - 2)$$

を展開すると、

$$2x^2 - 4x + 3x - 6 = 2x^2 - x - 6$$

となります。

答え

$$2x^2 - x - 6 = (2x + 3)(x - 2)$$

練習問題 6

次の式を因数分解しなさい。

$$3x^2 + 5x - 2$$

解答解説 6**解き方**

$3x^2$ から、

$$(3x + \square)(x + \square)$$

を考えます。

定数項が -2 なので、 1 と 2 を異符号で入れます。

$$(3x - 1)(x + 2)$$

を展開すると、

$$3x^2 + 6x - x - 2 = 3x^2 + 5x - 2$$

です。

答え

$$3x^2 + 5x - 2 = (3x - 1)(x + 2)$$

5 式の値と計算の工夫

5.1 条件を使って式の値を求める

式を変形してから代入する

式の値の問題では、値をそのまま代入すると計算が大変になることがあります。与えられた条件に合わせて、式を**因数分解**または**展開**してから代入します。

例題 7

$x + y = 6$,
 $xy = 5$ のとき、 $x^2 + y^2$ の値を求めなさい。

方針

$x^2 + y^2$ を、 $x + y$ と xy を使う形に変形します。

解き方

平方の公式より、

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

です。

したがって、

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

と変形できます。

条件を代入すると、

$$x^2 + y^2 = 6^2 - 2 \times 5 = 36 - 10 = 26$$

です。

答え

練習問題 7

$x + y = 8, xy = 12$ のとき、 $x^2 + y^2$ の値を求めなさい。

解答解説 7**解き方**

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

を使います。

条件を代入すると、

$$x^2 + y^2 = 8^2 - 2 \times 12 = 64 - 24 = 40$$

です。

答え

40

5.2 差の平方を使う**差も条件から求められる**

$x + y$ と xy が分かると、

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$$

を使って、 $x - y$ に関する値も求められます。

例題 8

$x + y = 7, xy = 10$ のとき、 $(x - y)^2$ の値を求めなさい。

方針

$(x - y)^2$ を、 $x + y$ と xy を使う形に変形します。

解き方

公式より、

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

です。

また、

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

なので、

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$$

となります。

条件を代入して、

$$(x - y)^2 = 7^2 - 4 \times 10 = 49 - 40 = 9$$

です。

答え

9

練習問題 8

$x + y = 9, xy = 18$ のとき、 $(x - y)^2$ の値を求めなさい。

解答解説 8**解き方**

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$$

を使います。

条件を代入すると、

$$(x - y)^2 = 9^2 - 4 \times 18 = 81 - 72 = 9$$

です。

答え

6 証明につながる式の変形

6.1 整数の性質を示す

因数分解で倍数を示す

整数の性質を示す問題では、式を因数分解して、**ある数が因数として含まれる**ことを示します。たとえば、2 が因数なら偶数、3 が因数なら 3 の倍数です。

例題 9

連続する 2 つの整数の積に、大きい方の整数をたした数は平方数になることを説明しなさい。

方針

小さい方の整数を n とし、式を作って因数分解します。

解き方

小さい方の整数を n とすると、大きい方の整数は $n + 1$ です。

2 つの整数の積に大きい方の整数をたすと、

$$n(n + 1) + (n + 1)$$

です。

共通因数 $n + 1$ でくくると、

$$(n + 1)(n + 1) = (n + 1)^2$$

です。

したがって、平方数になります。

答え

$$n(n + 1) + (n + 1) = (n + 1)^2$$

より、平方数である。

練習問題 9

連続する 2 つの整数の積に、小さい方の整数をひいた数は平方数になることを説明しなさい。

解答解説 9**解き方**

小さい方の整数を n とすると、大きい方は $n + 1$ です。

積から小さい方をひくと、

$$n(n + 1) - n$$

です。

共通因数 n でくくると、

$$n\{(n + 1) - 1\} = n^2$$

です。

したがって、平方数になります。

答え

$$n(n + 1) - n = n^2$$

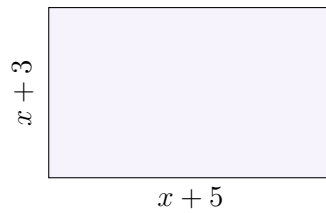
より、平方数である。

6.2 図形の面積を式で表す**面積から公式を見る**

図形の面積を 2 通りで表すと、展開公式や因数分解の意味を確認できます。応用問題では、図形と式を結びつける見方が大切です。

例題 10

縦が $x + 3$ 、横が $x + 5$ の長方形の面積を展開した式で表しなさい。

**方針**

長方形の面積は、縦 \times 横です。 $(x + 3)(x + 5)$ を展開します。

解き方

面積は、

$$(x + 3)(x + 5)$$

です。

展開すると、

$$x^2 + 5x + 3x + 15$$

です。

同類項をまとめると、

$$x^2 + 8x + 15$$

です。

答え

$$x^2 + 8x + 15$$

練習問題 10

縦が $x + 2$ 、横が $x + 7$ の長方形の面積を展開した式で表しなさい。

解答解説 10

解き方

面積は、

$$(x + 2)(x + 7)$$

です。

展開すると、

$$x^2 + 7x + 2x + 14 = x^2 + 9x + 14$$

です。

答え

$$x^2 + 9x + 14$$

7 入試大問につながる応用例題

7.1 因数分解を使って方程式を解く

積が 0 になる性質

因数分解した式が 0 に等しいとき、

$$AB = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ または } B = 0$$

を使います。二次方程式の入り口になる考え方です。

例題 11

次の方程式を解きなさい。

$$x^2 - 5x - 14 = 0$$

方針

左辺を因数分解し、積が 0 になる性質を使います。

解き方

左辺を因数分解します。

$$x^2 - 5x - 14 = (x - 7)(x + 2)$$

です。

したがって、

$$(x - 7)(x + 2) = 0$$

です。

積が 0 になるので、

$$x - 7 = 0 \quad \text{または} \quad x + 2 = 0$$

です。

答え

$$x = 7, -2$$

練習問題 11

次の方程式を解きなさい。

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

解答解説 11**解き方**

左辺を因数分解します。

$$x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$$

です。

したがって、

$$(x + 5)(x - 3) = 0$$

です。

よって、

$$x = -5, 3$$

です。

答え

$$x = -5, 3$$

7.2 条件から式を作る**文章を式に変える**

応用問題では、文章の条件を式にしてから、展開や因数分解を使います。まず何を x とおくかを定めることが大切です。

例題 12

ある正の数 x に 3 をたして 2 乗した数は、 x の 2 乗より 45 大きい。このとき、 x を求めなさい。

方針

「3 をたして 2 乗」を $(x + 3)^2$ と表し、条件から方程式を作ります。

解き方

条件より、

$$(x + 3)^2 = x^2 + 45$$

です。

左辺を展開します。

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 45$$

両辺から x^2 をひくと、

$$6x + 9 = 45$$

です。

両辺から 9 をひきます。

$$6x = 36$$

よって、

$$x = 6$$

です。

答え

$$x = 6$$

練習問題 12

ある正の数 x に 4 をたして 2 乗した数は、 x の 2 乗より 56 大きい。このとき、 x を求めなさい。

解答解説 12

解き方

条件から、

$$(x + 4)^2 = x^2 + 56$$

です。

展開すると、

$$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 56$$

です。

両辺から x^2 をひくと、

$$8x + 16 = 56$$

です。

よって、

$$8x = 40$$

となり、

$$x = 5$$

です。

答え

$$x = 5$$

8 単元まとめ練習問題

ここでは、乗法公式と因数分解の応用内容をまとめて確認します。どの公式を使うかを考えてから解きましょう。

8.1 問題

練習問題 まとめ 1

次の式を展開しなさい。

$$(2x + y - 4)^2$$

練習問題 まとめ 2

次の式を展開しなさい。

$$(x - 3y + 2)(x - 3y - 2)$$

練習問題 まとめ 3

次の式を因数分解しなさい。

$$(x + 1)^2 - 16$$

練習問題 まとめ 4

次の式を因数分解しなさい。

$$5x^2 - 20x + 20$$

練習問題 まとめ 5

次の式を因数分解しなさい。

$$2x^2 + 9x + 4$$

練習問題 まとめ 6

$x + y = 10, xy = 21$ のとき、 $x^2 + y^2$ の値を求めなさい。

練習問題 まとめ 7

次の方程式を解きなさい。

$$x^2 - 3x - 28 = 0$$

練習問題 まとめ 8

ある正の数 x に 5 をたして 2 乗した数は、 x の 2 乗より 85 大きい。このとき、 x を求めなさい。

8.2 解答解説

解答解説 まとめ 1

解き方

$2x + y$ をかたまりと見ます。

$$(2x + y - 4)^2 = (2x + y)^2 - 8(2x + y) + 16$$

です。

$(2x + y)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$ なので、

$$4x^2 + 4xy + y^2 - 16x - 8y + 16$$

です。

答え

$$4x^2 + 4xy + y^2 - 16x - 8y + 16$$

解答解説 まとめ 2**解き方**

$x - 3y$ をかたまりと見ます。

$$(x - 3y + 2)(x - 3y - 2) = (x - 3y)^2 - 2^2$$

です。

$(x - 3y)^2 = x^2 - 6xy + 9y^2$ なので、

$$x^2 - 6xy + 9y^2 - 4$$

です。

答え

$$x^2 - 6xy + 9y^2 - 4$$

解答解説 まとめ 3**解き方**

差の平方の公式を使います。

$$(x + 1)^2 - 16 = (x + 1)^2 - 4^2$$

です。

したがって、

$$(x + 1 + 4)(x + 1 - 4)$$

となります。

答え

$$(x + 5)(x - 3)$$

解答解説 まとめ 4

解き方

まず共通因数 5 でくくります。

$$5x^2 - 20x + 20 = 5(x^2 - 4x + 4)$$

です。

かっこの中は、

$$(x - 2)^2$$

です。

答え

$$5(x - 2)^2$$

解答解説 まとめ 5

解き方

$2x^2$ から、

$$(2x + \square)(x + \square)$$

を考えます。

定数項 4 から、1 と 4 の組み合わせを試します。

$$(2x + 1)(x + 4)$$

を展開すると、真ん中の項は $8x + x = 9x$ です。

答え

$$2x^2 + 9x + 4 = (2x + 1)(x + 4)$$

解答解説 まとめ 6

解き方

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

を使います。

条件を代入すると、

$$x^2 + y^2 = 10^2 - 2 \times 21 = 100 - 42 = 58$$

です。

答え

58

解答解説 まとめ 7

解き方

左辺を因数分解します。

$$x^2 - 3x - 28 = (x - 7)(x + 4)$$

です。

したがって、

$$(x - 7)(x + 4) = 0$$

なので、

$$x = 7, -4$$

です。

答え

$$x = 7, -4$$

解答解説 まとめ 8

解き方

条件から、

$$(x + 5)^2 = x^2 + 85$$

です。

展開すると、

$$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 85$$

です。

両辺から x^2 をひくと、

$$10x + 25 = 85$$

です。

よって、

$$10x = 60$$

となり、

$$x = 6$$

です。

答え

$$x = 6$$

9 学習チェックリスト

次の項目を確認し、できるようになったものにチェックを入れましょう。

チェックリスト

- かたまりを1つの文字のように見て展開できる。
- 和と差の積を使って、計算を短くできる。
- 置き換えを使って因数分解できる。
- 共通因数を先にくくってから因数分解できる。
- 係数が1でない二次式を因数分解できる。
- 条件を使って式の値を求められる。
- 因数分解を使って整数の性質を説明できる。
- 図形の面積と式を結びつけられる。
- 因数分解を使って方程式を解ける。
- 文章から式を作り、展開して解ける。

10 まとめ

乗法公式と因数分解の重要ポイント

- 複雑な式では、同じかたまりを 1 つの文字のように見る。
- 和と差の積は、 $A^2 - B^2$ の形にできる。
- 因数分解では、まず共通因数がないか確認する。
- 係数が 1 でない二次式では、展開後の真ん中の項を確認する。
- 式の値では、条件に合う形へ変形してから代入する。
- 証明問題では、因数分解して倍数や平方数の形を示す。
- 入試応用では、展開するか因数分解するかを最初に判断する。

次に取り組むこと

乗法公式と因数分解が安定したら、平方根や二次方程式の計算に進みましょう。特に、因数分解は二次方程式や関数の問題でも重要な土台になります。