

# 中学数学

## 乗法公式と因数分解

### 標準編

偏差値 50 前後を目指す入試標準対策

乗法公式を使った展開と因数分解を、  
高校入試の標準問題で安定して得点できる形まで練習します。

## 目次

1	この教材の使い方	2
2	展開の標準計算	3
2.1	分配法則を使う展開	3
2.2	多項式どうしの展開	4
3	乗法公式を使う	7
3.1	平方の公式	7
3.2	和と差の積	9
3.3	$(x + a)(x + b)$ の形	11
4	因数分解の標準計算	14
4.1	共通因数でくくる	14
4.2	平方の公式を逆に使う	15
4.3	差の平方を使う	17
5	和と積から因数分解する	20
5.1	$x^2 + px + q$ の因数分解	20
5.2	係数が 1 でない二次式	22
6	式の値と計算の工夫	25
6.1	展開してから代入する	25
6.2	公式で計算を工夫する	27
7	入試標準問題への利用	30
7.1	面積と展開	30
7.2	因数分解を使って値を求める	32
8	単元まとめ練習問題	35
8.1	問題	35
8.2	解答解説	36
9	学習チェックリスト	39
10	まとめ	40

# 1 この教材の使い方

この教材は、展開と因数分解の基本を確認したあと、入試標準問題で使える計算力を身につけるための教材です。公式を暗記するだけでなく、**どの形に当てはまるかを判断する力**を重視します。

## 学習の進め方

1. まずポイントで、公式と使う場面を確認します。
2. 例題では、「方針」を読んでから解き方を確認します。
3. 練習問題では、途中式を省略しすぎずに書きます。
4. 最後のまとめ練習問題で、展開と因数分解を混ぜて確認します。

## 注意 この教材で大切にすること

展開と因数分解は逆の操作です。入試では、式を見て**展開するのか、因数分解するのか**を判断する問題がよく出ます。計算だけでなく、式の形を見る習慣をつけましょう。

## 2 展開の標準計算

### 2.1 分配法則を使う展開

#### 展開の基本

展開では、かっこの外の数や文字を、かっこの中のすべての項にかけます。

$$a(b + c) = ab + ac$$

負の符号があるときは、符号ミスに注意します。

#### 例題 1

次の式を展開しなさい。

$$-3x(2x - 5)$$

#### 方針

$-3x$  を、かっこの中の  $2x$  と  $-5$  の両方にかけます。

#### 解き方

まず、 $-3x$  を  $2x$  にかけます。

$$-3x \times 2x = -6x^2$$

次に、 $-3x$  を  $-5$  にかけます。

$$-3x \times (-5) = +15x$$

したがって、

$$-3x(2x - 5) = -6x^2 + 15x$$

です。

#### 答え

$$-6x^2 + 15x$$

**練習問題 1**

次の式を展開しなさい。

$$-4a(3a - 2)$$

**解答解説 1****解き方**

$-4a$  を、 $3a$  と  $-2$  の両方にかけてみます。

$$-4a \times 3a = -12a^2$$

$$-4a \times (-2) = +8a$$

したがって、

$$-4a(3a - 2) = -12a^2 + 8a$$

です。

**答え**

$$-12a^2 + 8a$$

**2.2 多項式どうしの展開****すべての組み合わせをかける**

$(a + b)(c + d)$  では、前のかっこの各項を、後ろのかっこの各項にかけてみます。

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

**例題 2**

次の式を展開しなさい。

$$(x + 4)(x - 7)$$

**方針**

4つの積を作り、同類項をまとめます。

**解き方**

それぞれの項をかけます。

$$(x + 4)(x - 7) = x^2 - 7x + 4x - 28$$

同類項をまとめると、

$$-7x + 4x = -3x$$

です。したがって、

$$(x + 4)(x - 7) = x^2 - 3x - 28$$

となります。

**答え**

$$x^2 - 3x - 28$$

**練習問題 2**

次の式を展開しなさい。

$$(x - 3)(x + 8)$$

**解答解説 2****解き方**

4つの積を作ります。

$$(x - 3)(x + 8) = x^2 + 8x - 3x - 24$$

同類項をまとめると、

$$8x - 3x = 5x$$

です。

**答え**

$$x^2 + 5x - 24$$

### 3 乗法公式を使う

#### 3.1 平方の公式

##### 平方の公式

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

真ん中の項は、 $2ab$  になることに注意します。

**例題 3**

次の式を展開しなさい。

$$(2x - 3)^2$$

**方針**

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  に当てはめます。ここでは  $a = 2x$ 、 $b = 3$  です。

**解き方**

まず、それぞれを公式に入れます。

$$(2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot (2x) \cdot 3 + 3^2$$

順に計算すると、

$$(2x)^2 = 4x^2$$

$$-2 \cdot (2x) \cdot 3 = -12x$$

$$3^2 = 9$$

したがって、

$$(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$$

です。

**答え**

$$4x^2 - 12x + 9$$

**練習問題 3**

次の式を展開しなさい。

$$(3a + 2)^2$$

**解答解説 3****解き方**

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  を使います。

$$(3a + 2)^2 = (3a)^2 + 2 \cdot (3a) \cdot 2 + 2^2$$

よって、

$$(3a + 2)^2 = 9a^2 + 12a + 4$$

です。

**答え**

$$9a^2 + 12a + 4$$

**3.2 和と差の積****和と差の積**

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

同じ部分と符号だけが違う部分を見つけると、計算が速くなります。

**例題 4**

次の式を展開しなさい。

$$(5x + 2)(5x - 2)$$

**方針**

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$  を使います。ここでは  $a = 5x$ 、 $b = 2$  です。

**解き方**

公式に当てはめます。

$$(5x + 2)(5x - 2) = (5x)^2 - 2^2$$

それぞれ計算すると、

$$(5x)^2 = 25x^2, 2^2 = 4$$

です。

**答え**

$$25x^2 - 4$$

**練習問題 4**

次の式を展開しなさい。

$$(4a - 7)(4a + 7)$$

## 解答解説 4

## 解き方

$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$  を使います。

$$(4a - 7)(4a + 7) = (4a)^2 - 7^2$$

よって、

$$16a^2 - 49$$

です。

## 答え

$$16a^2 - 49$$

3.3  $(x + a)(x + b)$  の形 $(x + a)(x + b)$  の公式

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$x$  の係数は**和**、定数項は**積**になります。

**例題 5**

次の式を展開しなさい。

$$(x - 6)(x + 9)$$

**方針**

$x$  の係数は  $-6$  と  $+9$  の和、定数項は  $-6$  と  $+9$  の積で求めます。

**解き方**

$x$  の係数を求めます。

$$-6 + 9 = 3$$

定数項を求めます。

$$(-6) \times 9 = -54$$

したがって、

$$(x - 6)(x + 9) = x^2 + 3x - 54$$

です。

**答え**

$$x^2 + 3x - 54$$

**練習問題 5**

次の式を展開しなさい。

$$(x + 7)(x - 4)$$

**解答解説 5****解き方**

$x$  の係数は、

$$7 + (-4) = 3$$

です。定数項は、

$$7 \times (-4) = -28$$

です。

**答え**

$$x^2 + 3x - 28$$

## 4 因数分解の標準計算

### 4.1 共通因数でくくる

#### まず共通因数を探す

因数分解では、最初に共通因数がないかを確認します。数の共通因数だけでなく、文字も共通していないか見ます。

#### 例題 6

次の式を因数分解しなさい。

$$12x^2y - 18xy^2$$

#### 方針

係数の共通因数と、共通している文字を探します。

#### 解き方

12 と 18 の最大公約数は 6 です。文字は、どちらの項にも  $x$  と  $y$  が 1 つずつあります。

したがって、共通因数は  $6xy$  です。

$$12x^2y - 18xy^2 = 6xy(2x - 3y)$$

#### 答え

$$6xy(2x - 3y)$$

#### 練習問題 6

次の式を因数分解しなさい。

$$15a^2b + 10ab^2$$

**解答解説 6****解き方**

15 と 10 の最大公約数は 5 です。文字は  $a$  と  $b$  が共通しています。

共通因数は  $5ab$  なので、

$$15a^2b + 10ab^2 = 5ab(3a + 2b)$$

です。

**答え**

$$5ab(3a + 2b)$$

**4.2 平方の公式を逆に使う****平方の形を見つける**

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

両端が平方になっているときは、真ん中の項が  $2ab$  になっているか確認します。

**例題 7**

次の式を因数分解しなさい。

$$9x^2 - 24x + 16$$

**方針**

$9x^2 = (3x)^2$ 、 $16 = 4^2$  です。真ん中の項が  $-2 \cdot 3x \cdot 4$  になっているか確認します。

**解き方**

両端を平方で見ます。

$$9x^2 = (3x)^2, \quad 16 = 4^2$$

真ん中の項は、

$$-2 \cdot 3x \cdot 4 = -24x$$

となり、式と一致します。

したがって、

$$9x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2$$

です。

**答え**

$$(3x - 4)^2$$

**練習問題 7**

次の式を因数分解しなさい。

$$4a^2 + 20a + 25$$

**解答解説 7****解き方**

$4a^2 = (2a)^2$ 、 $25 = 5^2$  です。

真ん中の項は、

$$2 \cdot 2a \cdot 5 = 20a$$

です。

したがって、

$$4a^2 + 20a + 25 = (2a + 5)^2$$

です。

**答え**

$$(2a + 5)^2$$

**4.3 差の平方を使う****差の平方**

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

2つの平方の差になっている式は、この公式で因数分解できます。

**例題 8**

次の式を因数分解しなさい。

$$25x^2 - 36$$

**方針**

$25x^2 = (5x)^2$ 、 $36 = 6^2$  と見て、 $a^2 - b^2$  の形にします。

**解き方**

平方の形に直すと、

$$25x^2 - 36 = (5x)^2 - 6^2$$

です。

差の平方の公式を使うと、

$$(5x)^2 - 6^2 = (5x + 6)(5x - 6)$$

となります。

**答え**

$$(5x + 6)(5x - 6)$$

**練習問題 8**

次の式を因数分解しなさい。

$$49a^2 - 81$$

**解答解説 8****解き方**

$49a^2 = (7a)^2$ 、 $81 = 9^2$  です。

$$49a^2 - 81 = (7a)^2 - 9^2$$

差の平方の公式より、

$$(7a + 9)(7a - 9)$$

です。

**答え**

$$(7a + 9)(7a - 9)$$

## 5 和と積から因数分解する

### 5.1 $x^2 + px + q$ の因数分解

#### 和と積を考える

$$x^2 + px + q = (x + a)(x + b)$$

となるとき、 $a + b = p$ 、 $ab = q$  です。つまり、**和が  $p$ 、積が  $q$  になる 2 数**を探します。

**例題 9**

次の式を因数分解しなさい。

$$x^2 + 2x - 35$$

**方針**

和が 2、積が  $-35$  になる 2 つの整数を探します。

**解き方**

積が負なので、2 つの数の符号は異なります。

35 の約数の組は、

$$1 \times 35, \quad 5 \times 7$$

です。

和が 2 になるのは、 $+7$  と  $-5$  です。

$$7 + (-5) = 2, \quad 7 \times (-5) = -35$$

したがって、

$$x^2 + 2x - 35 = (x + 7)(x - 5)$$

です。

**答え**

$$(x + 7)(x - 5)$$

**練習問題 9**

次の式を因数分解しなさい。

$$x^2 - 4x - 45$$

**解答解説 9****解き方**

和が  $-4$ 、積が  $-45$  になる 2 数を探します。

積が負なので、符号は異なります。

$$5 + (-9) = -4, \quad 5 \times (-9) = -45$$

したがって、

$$x^2 - 4x - 45 = (x + 5)(x - 9)$$

です。

**答え**

$$(x + 5)(x - 9)$$

**5.2 係数が 1 でない二次式****展開して確認する**

係数が 1 でない二次式では、候補を作ったあとに展開して確認します。標準問題では、共通因数がないかを見てから、公式や組み合わせを使います。

**例題 10**

次の式を因数分解しなさい。

$$2x^2 + 7x + 3$$

**方針**

$(2x + 1)(x + 3)$  のように、先頭の積が  $2x^2$ 、定数項の積が 3 になる形を考えます。

**解き方**

先頭の項  $2x^2$  から、 $2x$  と  $x$  を考えます。

定数項 3 から、1 と 3 を考えます。

候補として、

$$(2x + 1)(x + 3)$$

を展開して確認します。

$$(2x + 1)(x + 3) = 2x^2 + 6x + x + 3$$

同類項をまとめると、

$$2x^2 + 7x + 3$$

になり、もとの式と一致します。

**答え**

$$(2x + 1)(x + 3)$$

**練習問題 10**

次の式を因数分解しなさい。

$$3x^2 + 10x + 3$$

## 解答解説 10

## 解き方

先頭の項  $3x^2$  から、 $3x$  と  $x$  を考えます。定数項 3 から、1 と 3 を考えます。

候補として、

$$(3x + 1)(x + 3)$$

を展開すると、

$$3x^2 + 9x + x + 3 = 3x^2 + 10x + 3$$

となります。

## 答え

$$(3x + 1)(x + 3)$$

## 6 式の値と計算の工夫

### 6.1 展開してから代入する

#### 式の値を求める流れ

複雑な式の値は、先に展開・整理してから代入すると計算しやすくなります。ただし、式の形によっては公式を使った方が速い場合もあります。

**例題 11**

$x = 4$  のとき、次の式の値を求めなさい。

$$(x + 5)(x - 2) - x(x + 3)$$

**方針**

先に展開して整理し、最後に  $x = 4$  を代入します。

**解き方**

まず展開します。

$$(x + 5)(x - 2) = x^2 + 3x - 10$$

$$x(x + 3) = x^2 + 3x$$

したがって、

$$\begin{aligned} & (x + 5)(x - 2) - x(x + 3) \\ &= (x^2 + 3x - 10) - (x^2 + 3x) \\ &= -10 \end{aligned}$$

です。

$x$  に関係なく、式の値は  $-10$  になります。

**答え**

$$-10$$

**練習問題 11**

$x = 7$  のとき、次の式の値を求めなさい。

$$(x + 2)(x - 5) - x(x - 3)$$

**解答解説 11****解き方**

まず展開します。

$$(x + 2)(x - 5) = x^2 - 3x - 10$$

$$x(x - 3) = x^2 - 3x$$

よって、

$$(x + 2)(x - 5) - x(x - 3) = -10$$

です。

**答え**

-10

**6.2 公式で計算を工夫する****数の計算にも公式を使う**

乗法公式は、数の計算にも使えます。

$$101^2 = (100 + 1)^2$$

のように、きりのよい数を利用します。

**例題 12**

工夫して計算しなさい。

$$99^2$$

**方針**

$99 = 100 - 1$  と見て、 $(a - b)^2$  を使います。

**解き方**

$$99^2 = (100 - 1)^2$$

平方の公式を使うと、

$$\begin{aligned}(100 - 1)^2 &= 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 \\ &= 10000 - 200 + 1 = 9801\end{aligned}$$

です。

**答え**

$$9801$$

**練習問題 12**

工夫して計算しなさい。

$$102^2$$

**解答解説 12****解き方**

102 = 100 + 2 と見ます。

$$\begin{aligned}102^2 &= (100 + 2)^2 \\ &= 10000 + 400 + 4 = 10404\end{aligned}$$

です。

**答え**

10404

## 7 入試標準問題への利用

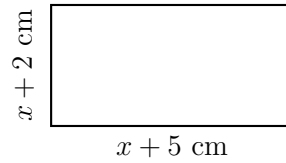
### 7.1 面積と展開

#### 図形の面積を式で表す

長方形や正方形の面積は、縦と横の積で表します。図形問題でも、かっこを含む式を作って展開する場面があります。

## 例題 13

縦が  $x + 2$  cm、横が  $x + 5$  cm の長方形があります。この長方形の面積を  $x$  を使った式で表しなさい。



## 方針

長方形の面積は、縦と横の積です。 $(x + 2)(x + 5)$  を展開します。

## 解き方

面積は、

$$(x + 2)(x + 5)$$

です。

これを展開します。

$$(x + 2)(x + 5) = x^2 + 5x + 2x + 10$$

同類項をまとめると、

$$x^2 + 7x + 10$$

です。

## 答え

$$x^2 + 7x + 10 \text{ cm}^2$$

## 練習問題 13

縦が  $x + 3$  cm、横が  $x + 6$  cm の長方形の面積を  $x$  を使った式で表しなさい。

**解答解説 13****解き方**

面積は、

$$(x + 3)(x + 6)$$

です。展開すると、

$$(x + 3)(x + 6) = x^2 + 6x + 3x + 18 = x^2 + 9x + 18$$

です。

**答え**

$$x^2 + 9x + 18 \text{ cm}^2$$

**7.2 因数分解を使って値を求める****因数分解で計算を楽にする**

式の値を求める問題では、因数分解してから代入すると計算が簡単になることがあります。

**例題 14**

$x = 23$  のとき、次の式の値を求めなさい。

$$x^2 - 6x + 9$$

**方針**

式を因数分解してから代入します。平方の形に注目します。

**解き方**

まず因数分解します。

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

ここに  $x = 23$  を代入します。

$$(23 - 3)^2 = 20^2 = 400$$

です。

**答え**

400

**練習問題 14**

$x = 18$  のとき、次の式の値を求めなさい。

$$x^2 - 10x + 25$$

**解答解説 14****解き方**

まず因数分解します。

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$$

$x = 18$  を代入すると、

$$(18 - 5)^2 = 13^2 = 169$$

です。

**答え**

169

## 8 単元まとめ練習問題

ここでは、展開・乗法公式・因数分解・式の値をまとめて確認します。式の形を見て、使う公式を判断しましょう。

### 8.1 問題

#### 練習問題 まとめ 1

次の式を展開しなさい。

$$(3x - 4)^2$$

#### 練習問題 まとめ 2

次の式を展開しなさい。

$$(2a + 5)(2a - 5)$$

#### 練習問題 まとめ 3

次の式を因数分解しなさい。

$$18x^2y - 12xy^2$$

#### 練習問題 まとめ 4

次の式を因数分解しなさい。

$$x^2 - 8x + 15$$

#### 練習問題 まとめ 5

次の式を因数分解しなさい。

$$16x^2 - 81$$

**練習問題 まとめ 6**

$x = 12$  のとき、次の式の値を求めなさい。

$$x^2 - 4x + 4$$

**8.2 解答解説****解答解説 まとめ 1****解き方**

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  を使います。

$$\begin{aligned}(3x - 4)^2 &= (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 4 + 4^2 \\ &= 9x^2 - 24x + 16\end{aligned}$$

です。

**答え**

$$9x^2 - 24x + 16$$

**解答解説 まとめ 2****解き方**

和と差の積の公式を使います。

$$\begin{aligned}(2a + 5)(2a - 5) &= (2a)^2 - 5^2 \\ &= 4a^2 - 25\end{aligned}$$

です。

**答え**

$$4a^2 - 25$$

**解答解説 まとめ 3****解き方**

係数の共通因数は 6、文字は  $x$  と  $y$  が共通しています。

$$18x^2y - 12xy^2 = 6xy(3x - 2y)$$

です。

**答え**

$$6xy(3x - 2y)$$

**解答解説 まとめ 4****解き方**

和が  $-8$ 、積が  $15$  になる 2 数を探します。

$$-3 + (-5) = -8, \quad (-3) \times (-5) = 15$$

したがって、

$$x^2 - 8x + 15 = (x - 3)(x - 5)$$

です。

**答え**

$$(x - 3)(x - 5)$$

**解答解説 まとめ 5****解き方**

$$16x^2 - 81 = (4x)^2 - 9^2$$

です。差の平方の公式より、

$$(4x + 9)(4x - 9)$$

となります。

**答え**

$$(4x + 9)(4x - 9)$$

**解答解説 まとめ 6****解き方**

まず因数分解します。

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

$x = 12$  を代入すると、

$$(12 - 2)^2 = 10^2 = 100$$

です。

**答え**

$$100$$

## 9 学習チェックリスト

次の項目を確認し、できるようになったものにチェックを入れましょう。

### チェックリスト

- 分配法則を使って、符号に注意して展開できる。
- 多項式どうしの展開で、すべての組み合わせをかけられる。
- 平方の公式を使って展開できる。
- 和と差の積の公式を使って展開できる。
- 共通因数でくくって因数分解できる。
- 平方の形を見つけて因数分解できる。
- 差の平方を使って因数分解できる。
- 和と積から  $(x + a)(x + b)$  の形に因数分解できる。
- 式の値の問題で、展開や因数分解を使って計算を工夫できる。
- 図形や文章題の中で、展開や因数分解を使える。

## 10 まとめ

### 乗法公式と因数分解の重要ポイント

- 展開は、かっこを外して式を整理する計算である。
- 因数分解は、式を積の形に直す計算である。
- 平方の公式では、真ん中の項が  $2ab$  になる。
- 和と差の積では、 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$  を使う。
- 因数分解では、まず共通因数を探す。
- $x^2 + px + q$  では、和が  $p$ 、積が  $q$  になる 2 数を探す。
- 入試標準問題では、展開と因数分解を使い分ける判断が大切である。

### 次に取り組むこと

標準編で公式の使い分けが安定したら、応用編では置き換えや複雑な式の因数分解、入試大問につながる問題に取り組みましょう。