

中学数学 乗法公式と因数分解の解き方

展開・共通因数・公式による因数分解を基礎から整理

展開

かっこを外して



$$(x+2)(x+3) \\ = x^2 + 5x + 6$$

因数分解

かっこの積に戻す



$$x^2 + 5x + 6 \\ = (x+2)(x+3)$$

よく使う公式

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$x^2 + (a+b)x + ab$$

$$= (x+a)(x+b)$$

この教材の対象

偏差値 40～50 程度の中学生在が、偏差値 50 以上を目指すための復習教材です。学校の授業、定期テスト、高校入試の基礎固めに使えます。

この教材で大切にすること

乗法公式と因数分解は、計算の速さだけでなく、**式の形を見分ける力**が大切です。展開と因数分解は逆向きの計算として整理しましょう。

この教材の使い方

学習の進め方

- (1) まず、展開と因数分解の意味を区別する。
- (2) 乗法公式を、式の形とセットで覚える。
- (3) 因数分解では、最初に**共通因数がないか**を確認する。
- (4) 高校入試では、計算だけでなく、式の利用・図形・整数問題にもつながる。

目次

この教材の使い方	1
1 展開と因数分解の基本	2
1.1 展開とは	2
1.2 因数分解とは	2
2 乗法公式	4
2.1 $(a + b)^2$ と $(a - b)^2$	4
2.2 $(a + b)(a - b)$	4
2.3 $(x + a)(x + b)$	5
3 共通因数による因数分解	6
3.1 共通因数とは	6
4 公式を使う因数分解	7
4.1 $x^2 + 2ax + a^2$ の形	7
4.2 $a^2 - b^2$ の形	7
4.3 $x^2 + (a + b)x + ab$ の形	8
5 高校入試で役立つ見方	10
5.1 どの方法を使うか判断する	10
5.2 計算を楽にする使い方	10
6 よくあるつまずき	12
7 勉強法	13
8 練習問題	14
9 練習問題の解答・解説	16
10 まとめ	18

1 展開と因数分解の基本

1.1 展開とは

展開の意味

かっこの積を、かっこのない多項式にすることを**展開**といいます。

$$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$$

のように、かっこを外して整理します。

例題 1 分配法則で展開する

$x(x + 5)$ を展開しなさい。

解説

分配法則を使って、 x をかっこの中のそれぞれにかけます。

$$\begin{aligned} x(x + 5) &= x \cdot x + x \cdot 5 \\ &= x^2 + 5x \end{aligned}$$

答え： $x^2 + 5x$

1.2 因数分解とは

因数分解の意味

多項式を、かっこの積の形にすることを**因数分解**といいます。

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

のように、展開と逆向きの計算です。

例題 2 因数分解と展開の関係

$(x + 4)(x + 1)$ を展開し、その結果を因数分解で元に戻しなさい。

解説

まず展開します。

$$\begin{aligned} (x + 4)(x + 1) &= x^2 + x + 4x + 4 \\ &= x^2 + 5x + 4 \end{aligned}$$

この式を因数分解すると、

$$x^2 + 5x + 4 = (x + 4)(x + 1)$$

です。

答え：展開すると $x^2 + 5x + 4$ 、因数分解すると $(x + 4)(x + 1)$

展開と因数分解を混同しない

展開は「かっこを外す」、因数分解は「かっこの積にする」と考えましょう。

$$(x + 2)(x + 3) \rightarrow x^2 + 5x + 6$$

は展開、

$$x^2 + 5x + 6 \rightarrow (x + 2)(x + 3)$$

は因数分解です。

2 乗法公式

2.1 $(a + b)^2$ と $(a - b)^2$

平方の公式

次の2つは、特によく使う公式です。

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

真ん中の項は、 $2ab$ になることに注意しましょう。

例題3 $(x + 3)^2$ の展開

$(x + 3)^2$ を展開しなさい。

解説

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ を使います。ここでは、 $a = x$ 、 $b = 3$ です。

$$\begin{aligned} (x + 3)^2 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 \\ &= x^2 + 6x + 9 \end{aligned}$$

答え： $x^2 + 6x + 9$

例題4 $(x - 5)^2$ の展開

$(x - 5)^2$ を展開しなさい。

解説

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ を使います。ここでは、 $a = x$ 、 $b = 5$ です。

$$\begin{aligned} (x - 5)^2 &= x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 \\ &= x^2 - 10x + 25 \end{aligned}$$

答え： $x^2 - 10x + 25$

2.2 $(a + b)(a - b)$

和と差の積

次の公式もよく使います。

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

真ん中の項が消えるため、計算が短くなります。

例題 5 和と差の積

$(x + 7)(x - 7)$ を展開しなさい。

解説

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ を使います。

$$\begin{aligned}(x + 7)(x - 7) &= x^2 - 7^2 \\ &= x^2 - 49\end{aligned}$$

答え： $x^2 - 49$

2.3 $(x + a)(x + b)$

$(x + a)(x + b)$ の公式

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

です。 x の係数は $a + b$ 、定数項は ab になります。

例題 6 $(x + a)(x + b)$ の展開

$(x + 2)(x + 6)$ を展開しなさい。

解説

x の係数は $2 + 6 = 8$ 、定数項は $2 \times 6 = 12$ です。

$$\begin{aligned}(x + 2)(x + 6) &= x^2 + (2 + 6)x + 2 \times 6 \\ &= x^2 + 8x + 12\end{aligned}$$

答え： $x^2 + 8x + 12$

3 共通因数による因数分解

3.1 共通因数とは

まず共通因数を探す

すべての項に共通している因数を**共通因数**といいます。

$$6x + 9 = 3(2x + 3)$$

のように、共通している 3 を外に出します。因数分解では、まず共通因数がないかを確認しましょう。

例題 7 共通因数でくくる

$4x + 12$ を因数分解しなさい。

解説

$4x$ と 12 に共通している因数は 4 です。

$$4x + 12 = 4(x + 3)$$

展開して確認すると、

$$4(x + 3) = 4x + 12$$

となります。

答え： $4(x + 3)$

例題 8 文字を含む共通因数

$6x^2 - 9x$ を因数分解しなさい。

解説

$6x^2$ と $-9x$ には、 $3x$ が共通しています。

$$6x^2 - 9x = 3x(2x - 3)$$

答え： $3x(2x - 3)$

確認ポイント：係数だけでなく、文字 x も共通していないか確認しましょう。

共通因数を忘れない

たとえば、 $2x^2 + 6x$ をいきなり公式で考える前に、まず $2x$ でくくります。

$$2x^2 + 6x = 2x(x + 3)$$

因数分解では、**共通因数を先に見る**ことが大切です。

4 公式を使う因数分解

4.1 $x^2 + 2ax + a^2$ の形

平方の形に戻す

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

です。最初と最後が平方になっているか、真ん中が $2ab$ の形かを確認しましょう。

例題 9 平方の形の因数分解

$x^2 + 8x + 16$ を因数分解しなさい。

解説

x^2 は x の平方、 16 は 4^2 です。真ん中の項は、

$$2 \cdot x \cdot 4 = 8x$$

となっています。したがって、

$$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$$

答え： $(x + 4)^2$

例題 10 マイナスを含む平方の形

$x^2 - 12x + 36$ を因数分解しなさい。

解説

$36 = 6^2$ で、真ん中の項は

$$-2 \cdot x \cdot 6 = -12x$$

です。したがって、

$$x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2$$

答え： $(x - 6)^2$

4.2 $a^2 - b^2$ の形

差の平方

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

です。2つの平方の差になっているときに使います。

例題 11 差の平方

$x^2 - 25$ を因数分解しなさい。

解説

$25 = 5^2$ なので、

$$\begin{aligned} x^2 - 25 &= x^2 - 5^2 \\ &= (x + 5)(x - 5) \end{aligned}$$

答え： $(x + 5)(x - 5)$

4.3 $x^2 + (a + b)x + ab$ の形

たして係数、かけて定数項

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

です。因数分解では、**たすと x の係数、かけると定数項**になる 2 数を探します。

例題 12 2 数を探す因数分解

$x^2 + 7x + 12$ を因数分解しなさい。

解説

たすと 7、かけると 12 になる 2 つの数を探します。

$$3 + 4 = 7, \quad 3 \times 4 = 12$$

なので、

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$$

答え： $(x + 3)(x + 4)$

例題 13 符号に注意する因数分解

$x^2 - x - 20$ を因数分解しなさい。

解説

たすと -1 、かけると -20 になる 2 つの数を探します。

$$4 + (-5) = -1, \quad 4 \times (-5) = -20$$

したがって、

$$x^2 - x - 20 = (x + 4)(x - 5)$$

答え： $(x + 4)(x - 5)$

5 高校入試で役立つ見方

5.1 どの方法を使うか判断する

因数分解の順番

因数分解では、次の順に見ると整理しやすくなります。

- (1) 共通因数があるか。
- (2) 平方の形か。
- (3) 差の平方か。
- (4) たして係数、かけて定数項になる 2 数を探せるか。

例題 14 共通因数と公式を組み合わせる

$2x^2 + 10x + 12$ を因数分解しなさい。

解説

まず、すべての項に共通する 2 でくくります。

$$2x^2 + 10x + 12 = 2(x^2 + 5x + 6)$$

次に、かっこの中を因数分解します。たすと 5、かけると 6 になる 2 数は 2 と 3 です。

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

したがって、

$$2x^2 + 10x + 12 = 2(x + 2)(x + 3)$$

答え： $2(x + 2)(x + 3)$

5.2 計算を楽にする使い方

乗法公式で暗算を楽にする

乗法公式は、数の計算にも使えます。たとえば、

$$103^2 = (100 + 3)^2$$

と考えると、

$$10000 + 600 + 9 = 10609$$

と計算できます。

例題 15 乗法公式を使った計算

98^2 を乗法公式を使って計算しなさい。

解説

$98 = 100 - 2$ なので、

$$\begin{aligned}98^2 &= (100 - 2)^2 \\ &= 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 2 + 2^2 \\ &= 10000 - 400 + 4 = 9604\end{aligned}$$

答え：9604

6 よくあるつまずき

つまずき1 $(x+3)^2$ を x^2+9 にしてしまう

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

です。真ん中の $6x$ を忘れないようにしましょう。

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

です。

つまずき2 因数分解で共通因数を見落とす

$$3x^2 + 12x = 3x(x+4)$$

です。最初に、すべての項に共通する数や文字がないか確認しましょう。

つまずき3 符号の組み合わせを間違える

$x^2 - x - 20$ では、かけて -20 なので、2つの数の符号は異なります。

$$4 + (-5) = -1, \quad 4 \times (-5) = -20$$

符号を落ち着いて確認しましょう。

つまずき4 因数分解の最後に確認しない

因数分解の答えは、展開して元に戻るか確認できます。

$$(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$$

のように、展開でチェックする習慣をつけましょう。

7 勉強法

乗法公式と因数分解の勉強手順

- (1) 乗法公式を、式の形ごとに覚える。
- (2) 展開を練習して、公式の形に慣れる。
- (3) 因数分解では、まず共通因数を確認する。
- (4) たして係数、かけて定数項になる 2 数を探す練習をする。
- (5) 最後に、展開して答えを確認する。

高校入試に向けて意識したいこと

高校入試では、因数分解は単独の計算問題だけでなく、方程式、関数、図形、整数の説明問題にもつながります。計算方法を覚えるだけでなく、**式の形を見分ける練習**を重ねましょう。

8 練習問題

基本問題 1 展開

$(x + 4)(x + 2)$ を展開しなさい。

基本問題 2 平方の公式

$(x - 3)^2$ を展開しなさい。

基本問題 3 和と差の積

$(x + 8)(x - 8)$ を展開しなさい。

基本問題 4 共通因数

$5x + 20$ を因数分解しなさい。

基本問題 5 文字を含む共通因数

$8x^2 - 12x$ を因数分解しなさい。

基本問題 6 平方の因数分解

$x^2 + 10x + 25$ を因数分解しなさい。

基本問題 7 差の平方

$x^2 - 36$ を因数分解しなさい。

基本問題 8 2 数を探す因数分解

$x^2 + 9x + 20$ を因数分解しなさい。

基本問題 9 符号に注意

$x^2 + 2x - 15$ を因数分解しなさい。

入試問題 1 共通因数と因数分解

$3x^2 + 18x + 27$ を因数分解しなさい。

入試問題 2 乗法公式を利用した計算

$102^2 - 98^2$ を、公式を使って計算しなさい。

入試問題 3 整数の説明

連続する 2 つの整数を $n, n + 1$ とする。この 2 つの整数の積に小さい方の整数 n を足した数が、 $n^2 + 2n$ と表せることを説明しなさい。

9 練習問題の解答・解説

基本問題 1 展開

$$\begin{aligned}(x+4)(x+2) &= x^2 + (4+2)x + 4 \times 2 \\ &= x^2 + 6x + 8\end{aligned}$$

答え： $x^2 + 6x + 8$

基本問題 2 平方の公式

$$\begin{aligned}(x-3)^2 &= x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 \\ &= x^2 - 6x + 9\end{aligned}$$

答え： $x^2 - 6x + 9$

基本問題 3 和と差の積

$$(x+8)(x-8) = x^2 - 8^2 = x^2 - 64$$

答え： $x^2 - 64$

基本問題 4 共通因数

$$5x + 20 = 5(x + 4)$$

答え： $5(x + 4)$

基本問題 5 文字を含む共通因数

$8x^2$ と $-12x$ には、 $4x$ が共通しています。

$$8x^2 - 12x = 4x(2x - 3)$$

答え： $4x(2x - 3)$

基本問題 6 平方の因数分解

$$\begin{aligned}x^2 + 10x + 25 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 \\ &= (x + 5)^2\end{aligned}$$

答え： $(x + 5)^2$

基本問題 7 差の平方

$$x^2 - 36 = x^2 - 6^2 = (x + 6)(x - 6)$$

答え： $(x + 6)(x - 6)$

基本問題 8 2 数を探す因数分解

たすと 9、かけると 20 になる 2 数は 4 と 5 です。

$$x^2 + 9x + 20 = (x + 4)(x + 5)$$

答え： $(x + 4)(x + 5)$

基本問題 9 符号に注意

たすと 2、かけると -15 になる 2 数は 5 と -3 です。

$$x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$$

答え： $(x + 5)(x - 3)$

入試問題 1 共通因数と因数分解

まず、3 でくくります。

$$3x^2 + 18x + 27 = 3(x^2 + 6x + 9)$$

かっこの中は平方の形です。

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

したがって、

$$3x^2 + 18x + 27 = 3(x + 3)^2$$

答え： $3(x + 3)^2$

入試問題 2 乗法公式を利用した計算

差の平方の公式を使います。

$$\begin{aligned} 102^2 - 98^2 &= (102 + 98)(102 - 98) \\ &= 200 \times 4 = 800 \end{aligned}$$

答え： 800

入試問題 3 整数の説明

連続する 2 つの整数は $n, n + 1$ です。積は、

$$n(n + 1)$$

です。これに小さい方の整数 n を足すと、

$$\begin{aligned} n(n + 1) + n &= n^2 + n + n \\ &= n^2 + 2n \end{aligned}$$

となります。

答え： 上のよう計算すると、 $n^2 + 2n$ と表せる。

10 まとめ

乗法公式と因数分解で覚えること

- 展開は、かっこを外して多項式にすること。
- 因数分解は、多項式をかっこの積にすること。
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- 因数分解では、まず共通因数を見る。
- $x^2 + (a + b)x + ab$ では、たして係数、かけて定数項になる 2 数を探す。

次につなげる学習

乗法公式と因数分解は、平方根、二次方程式、関数、図形の面積問題にもつながります。特に、**展開して確認する習慣**をつけると、計算ミスを減らせます。