中学数学
公式確認

関数

比例・反比例・一次関数・二次関数をまとめて確認

比例・反比例、一次関数、二次関数について、
式・グラフ・変化の割合を確認します。

KmKmの学習支援サイト

目次

1　この教材の使い方

この教材は、中学数学の「関数」でよく使う公式や考え方を、短時間で確認するための教材です。関数では、**式**、**表**、**グラフ**、**変化の割合**をつなげて考えることが大切です。

公式確認で意識すること

1. どの関数の式なのかを確認します。
2. 文字 x と y の関係を、式・表・グラフで見ます。
3. 一次関数では、傾きと切片を確認します。
4. 二次関数では、a の符号と値、変化の割合を確認します。

関数で大切なこと

公式だけを覚えるのではなく、グラフの形や読み取り方とセットで確認しましょう。特に、**変化の割合**は一次関数と二次関数で考え方が違います。

2　比例・反比例

2.1　比例の式

比例の式

$$y = ax$$

使う場面　x が 2 倍、3 倍になると、y も 2 倍、3 倍になる関係で使います。

確認ポイント　a を比例定数といいます。比例のグラフは原点を通る直線です。

ミニ例　y が x に比例し、$x = 3$ のとき $y = 12$ なら、$a = 4$ なので $y = 4x$

比例定数の求め方

$$a = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

使う場面　比例の式 $y = ax$ の a を求めるときに使います。

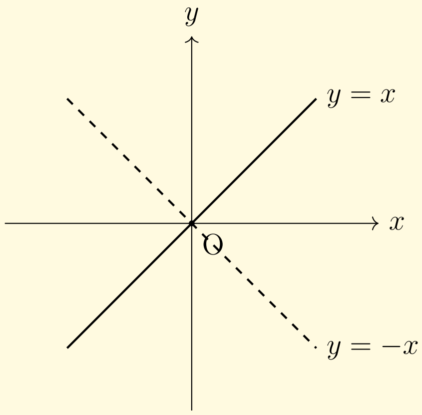
確認ポイント　x と y の対応する値を代入します。

ミニ例　$x = 5$、$y = -10$ なら、$a = \frac{-10}{5} = -2$

2.2　比例のグラフ

比例のグラフの特徴

比例 $y = ax$ のグラフは、**原点を通る直線**です。



使う場面　比例の式からグラフをかくとき、またはグラフから式を読むときに使います。

確認ポイント　$a > 0$ なら右上がり、$a < 0$ なら右下がりです。

比例の変化の割合

比例 $y = ax$ では、変化の割合は常に a です。

$$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}} = a$$

使う場面　比例のグラフの傾きを確認するときに使います。

確認ポイント　比例は一次関数の一種で、切片が 0 の直線です。

ミニ例　$y = 3x$ の変化の割合は 3

2.3　反比例の式

反比例の式

$$y = \frac{a}{x}$$

または、

$$xy = a$$

使う場面　x が 2 倍、3 倍になると、y が $\frac{1}{2}$ 倍、$\frac{1}{3}$ 倍になる関係で使います。

確認ポイント　a を比例定数といいます。xy の値がいつも一定になります。

ミニ例　$x = 4$ のとき $y = 3$ なら、$a = 12$ なので $y = \frac{12}{x}$

反比例の比例定数

$$a = xy$$

使う場面　反比例の式 $y = \frac{a}{x}$ の a を求めるときに使います。

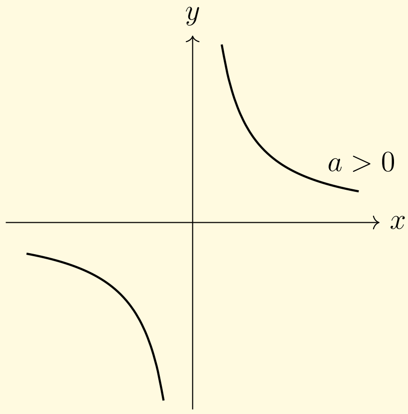
確認ポイント　x と y をかけると比例定数になります。

ミニ例　$x = -2$、$y = 5$ なら、$a = -10$

2.4　反比例のグラフ

反比例のグラフの特徴

反比例 $y = \frac{a}{x}$ のグラフは、**双曲線**になります。



使う場面　反比例の式からグラフを考えるときに使います。

確認ポイント　$a > 0$ なら第 1 象限と第 3 象限、$a < 0$ なら第 2 象限と第 4 象限にグラフができます。

3　一次関数

3.1　一次関数の式

一次関数の式

$$y = ax + b$$

使う場面　グラフが直線になる関数を表すときに使います。

確認ポイント　a は傾き、b は切片です。

ミニ例　傾きが 2、切片が 3 なら、$y = 2x + 3$

切片

一次関数 $y = ax + b$ で、b は **y 軸との交点の y 座標**です。

$$x = 0 \quad \text{のとき} \quad y = b$$

使う場面　グラフから式を読み取るときに使います。

確認ポイント　切片は、x 軸との交点ではなく、y 軸との交点です。

ミニ例　$y = -3x + 5$ の切片は 5

3.2　傾きと変化の割合

一次関数の変化の割合

$$\text{変化の割合} = \frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$$

一次関数 $y = ax + b$ では、

$$\text{変化の割合} = a$$

です。

使う場面　一次関数の傾きを求めるときに使います。

確認ポイント　一次関数では、どの区間で考えても変化の割合は一定です。

ミニ例　x が 2 増えて y が 6 増えるなら、変化の割合は $\frac{6}{2} = 3$

グラフの傾き

$$\text{傾き} = \frac{\text{上に進む量}}{\text{右に進む量}}$$

使う場面　グラフから一次関数の式を読むときに使います。

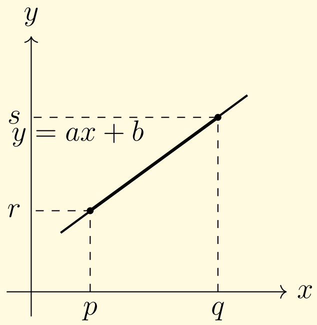
確認ポイント　右に進んだとき、上がれば正、下がれば負の傾きです。

ミニ例　右に 4、下に 2 進む直線の傾きは $\frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

3.3　一次関数の変域

一次関数の変域

x の変域が決まっているときは、その範囲の両端で y の値を求めます。



使う場面　一次関数で、x の範囲から y の範囲を求めるときに使います。

確認ポイント　一次関数のグラフは直線なので、基本的に変域の両端を調べます。

ミニ例　$y = 2x + 1$、$1 \leqq x \leqq 4$ なら、$x = 1$ で $y = 3$、$x = 4$ で $y = 9$。したがって、$3 \leqq y \leqq 9$

3.4　2 点を通る直線の式

2 点から傾きを求める

2 点 (x_1, y_1)、(x_2, y_2) を通る直線の傾きは、

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

です。

使う場面　2 点の座標から一次関数の式を求めるときに使います。

確認ポイント　x の差を分母、y の差を分子にします。順番をそろえます。

ミニ例　$(1, 2)$、$(4, 8)$ なら、$a = \frac{8-2}{4-1} = 2$

1 点と傾きから式を求める

一次関数を $y = ax + b$ とおき、傾き a と通る点の座標を代入して b を求めます。

使う場面　傾きと 1 点がわかっているときに使います。

確認ポイント　最後に $y = ax + b$ の形で答えます。

ミニ例　傾き 2 で $(3, 7)$ を通るとき、$7 = 2 \times 3 + b$ より $b = 1$、だから $y = 2x + 1$

3.5　交点の求め方

2 直線の交点

2 つの直線の交点は、2 つの式を連立方程式として解いて求めます。

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = cx + d \end{cases}$$

使う場面　2 つの一次関数のグラフが交わる点を求めるときに使います。

確認ポイント　交点では、2 つの式の x と y が同じ値になります。

ミニ例　$y = 2x + 1$ と $y = -x + 7$ の交点は、$2x + 1 = -x + 7$ から求める

x 軸との交点

x 軸との交点では、

$$y = 0$$

です。

使う場面　一次関数のグラフが x 軸と交わる点を求めるときに使います。

確認ポイント　$y = 0$ を代入して x を求めます。

ミニ例　$y = 2x - 6$ なら、$0 = 2x - 6$ より $x = 3$

4　二次関数

4.1　$y = ax^2$ の式

二次関数の基本形

$$y = ax^2$$

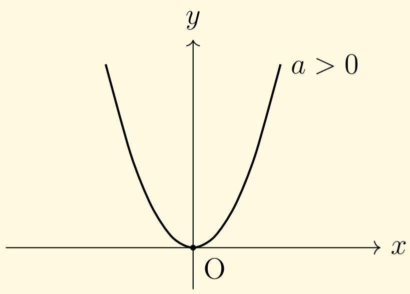
使う場面　x を 2 乗した値に比例する関係で使います。

確認ポイント　a の値によって、グラフの開き方や向きが変わります。

ミニ例　y が x^2 に比例し、$x = 2$ のとき $y = 12$ なら、$12 = 4a$ より $a = 3$、だから $y = 3x^2$

二次関数のグラフの特徴

$y = ax^2$ のグラフは、原点を頂点とする**放物線**です。

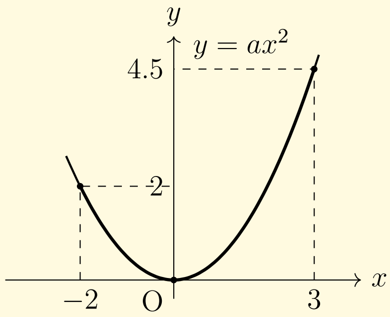


確認ポイント　$a > 0$ なら上に開き、$a < 0$ なら下に開きます。$|a|$ が大きいほど細い放物線になります。

4.2　変域

二次関数の変域

x の変域が決まっているときは、その範囲で y の最小値・最大値を確認します。



使う場面　x の範囲から y の範囲を求めるときに使います。

確認ポイント　$y = ax^2$ では、$x = 0$ が範囲に含まれるかどうかを確認します。含まれる場合、頂点が最小値または最大値になります。

ミニ例　$y = x^2$、$-2 \leqq x \leqq 3$ なら、最小値 0、最大値 9 なので、$0 \leqq y \leqq 9$

対称性

$y = ax^2$ では、

$$x = p \quad \text{と} \quad x = -p$$

のとき、y の値は同じです。

使う場面　グラフや変域を考えるときに使います。

確認ポイント　y 軸に対して左右対称です。

ミニ例　$y = 2x^2$ では、$x = 3$ と $x = -3$ のとき、どちらも $y = 18$

4.3 二次関数の変化の割合

$y = ax^2$ の変化の割合

$y = ax^2$ で、x が p から q まで増加するとき、変化の割合は、

$$a(p+q)$$

です。

使う場面　二次関数の変化の割合を求めるときに使います。

確認ポイント　一次関数と違い、二次関数の変化の割合は区間によって変わります。

ミニ例　$y = 2x^2$ で、x が 1 から 4 まで増加するとき、変化の割合は $2(1+4) = 10$

増加量から求める方法

$$\text{変化の割合} = \frac{aq^2 - ap^2}{q-p}$$

使う場面　公式 $a(p+q)$ を忘れたときや、途中を確認したいときに使います。

確認ポイント　分子は y の増加量、分母は x の増加量です。

ミニ例　$y = x^2$ で x が 2 から 5 までなら、$\frac{25-4}{5-2} = 7$

4.4　二次関数と一次関数の交点

放物線と直線の交点

放物線 $y = ax^2$ と直線 $y = mx + n$ の交点は、

$$ax^2 = mx + n$$

として、二次方程式を解きます。

使う場面　二次関数と一次関数のグラフの交点を求めるときに使います。

確認ポイント　求めた x の値を、どちらかの式に代入して y を求めます。

ミニ例　$y = x^2$ と $y = x + 2$ なら、$x^2 = x + 2$ を解く

交点の個数

二次方程式の解の個数によって、交点の個数が決まります。

- 解が 2 つ：交点が 2 個
- 解が 1 つ：接する
- 解がない：交点なし

使う場面　グラフの位置関係を考えるときに使います。

確認ポイント　中学範囲では、実際に方程式を解いて判断することが多いです。

5　よくある間違い

比例と一次関数の混同

比例は $y = ax$、一次関数は $y = ax + b$ です。比例のグラフは必ず原点を通りますが、一次関数は原点を通るとは限りません。

傾きと切片の読み違い

一次関数 $y = ax + b$ では、a が傾き、b が切片です。切片は y 軸との交点の y 座標です。

二次関数の変化の割合

二次関数 $y = ax^2$ の変化の割合は、一定ではありません。x が p から q まで増加するときは $a(p + q)$ を使います。

変域の確認不足

二次関数の変域では、$x = 0$ が範囲に含まれるかどうかを確認します。端の値だけを見ると、最小値を見落とすことがあります。

6　学習チェックリスト

できるようになったか確認しよう

- □比例の式 $y = ax$ を確認できる。
- □比例のグラフが原点を通る直線であることを説明できる。
- □反比例の式 $y = \frac{a}{x}$ と $xy = a$ を確認できる。
- □反比例のグラフの位置を a の符号で判断できる。
- □一次関数 $y = ax + b$ の傾きと切片を確認できる。
- □2 点から一次関数の傾きを求められる。
- □一次関数の変域をグラフと式から確認できる。
- □2 直線の交点を連立方程式で求められる。
- □二次関数 $y = ax^2$ のグラフの特徴を確認できる。
- □二次関数の変域を確認できる。
- □二次関数の変化の割合 $a(p + q)$ を使える。
- □放物線と直線の交点を方程式で求められる。

7　まとめ

公式確認｜関数のまとめ

関数では、式だけでなく、表やグラフとあわせて考えることが大切です。比例は $y = ax$、反比例は $y = \frac{a}{x}$、一次関数は $y = ax + b$、二次関数は $y = ax^2$ という基本形をまず確認しましょう。

一次関数では、傾きと切片を読み取る力に加えて、変域を両端の値から確認することが大切です。二次関数では、グラフの形、変域、変化の割合を区別して確認します。

公式を覚えるだけでなく、**グラフでは何を表しているか、どの場面で使うか**をセットで確認することで、入試問題でも使いやすくなります。