中学数学

関数

応用編

偏差値55以上を目指す入試応用対策

比例・反比例・一次関数・二次関数を組み合わせ、
グラフの交点・面積・動点問題まで練習します。

KmKmの学習支援サイト

目次

1　この教材の使い方

この教材は、関数の基本と標準問題を一通り学習した人が、入試で差がつく応用問題に対応するための教材です。式、表、グラフ、面積、動点を結びつけて考える力を伸ばします。

学習の進め方

1. まず「ポイント」で、応用問題で使う見方を確認します。
2. 例題では、「方針」で解く順番を決めてから「解き方」を読みます。
3. グラフがある問題では、座標・傾き・交点を図に書き込みます。
4. まとめ練習問題で、複数の関数が混ざる問題を確認します。

注意 この教材で大切にすること

関数の応用問題では、計算だけでなく、**グラフから式を作る力**と**式から意味を読み取る力**が大切です。問題文を読んだら、まず何が分かっていて、何を求めるのかを整理しましょう。

2　グラフから式を作る

2.1　2 点から一次関数の式を求める

2 点が分かると直線が決まる

一次関数 $y = ax + b$ は、2 点を通ることが分かれば式を決めることができます。まず**変化の割合**を求め、そのあと 1 点を代入して切片を求めます。

例題 1

2 点 $(1,5)$、$(4,-1)$ を通る直線の式を求めなさい。

方針

2 点の座標から変化の割合を求め、$y=ax+b$ に代入して b を求めます。

解き方

変化の割合は、

$$a=\frac{-1-5}{4-1}=\frac{-6}{3}=-2$$

です。

したがって、式は

$$y=-2x+b$$

とおけます。

点 $(1,5)$ を代入します。

$$5=-2\times 1+b$$

$$5=-2+b$$

よって、

$$b=7$$

です。

答え

$$y=-2x+7$$

練習問題 1

2 点 $(-2,1)$、$(2,9)$ を通る直線の式を求めなさい。

解答解説 1

解き方

変化の割合は、

$$a = \frac{9-1}{2-(-2)} = \frac{8}{4} = 2$$

です。

式を $y = 2x + b$ とおき、点 $(2, 9)$ を代入します。

$$9 = 2 \times 2 + b$$

$$9 = 4 + b$$

よって、$b = 5$ です。

答え

$$y = 2x + 5$$

2.2 交点を使って式を求める

交点は 2 つの式を同時に満たす点

2 つのグラフの交点は、両方の式に代入して成り立つ点です。交点を求めるときは、2 つの式を連立方程式として解きます。

例題 2

直線 $y = x + 2$ と $y = -2x + 8$ の交点の座標を求めなさい。

方針

交点では 2 つの y の値が等しいので、$x + 2 = -2x + 8$ として解きます。

解き方

交点では、

$$x + 2 = -2x + 8$$

が成り立ちます。

両辺に $2x$ をたします。

$$3x + 2 = 8$$

両辺から 2 をひきます。

$$3x = 6$$

したがって、

$$x = 2$$

です。

$y = x + 2$ に代入すると、

$$y = 2 + 2 = 4$$

です。

答え

$$(2, 4)$$

練習問題 2

直線 $y = 2x - 1$ と $y = -x + 8$ の交点の座標を求めなさい。

解答解説 2

解き方

交点では、

$$2x - 1 = -x + 8$$

です。

両辺に x をたします。

$$3x - 1 = 8$$

両辺に 1 をたします。

$$3x = 9$$

よって、$x = 3$ です。

$y = 2x - 1$ に代入します。

$$y = 2 \times 3 - 1 = 5$$

答え

$$(3, 5)$$

3　一次関数と面積

3.1　座標平面上の三角形

面積は底辺と高さで考える

座標平面上の図形では、軸に平行な辺を底辺にすると計算しやすくなります。三角形の面積は、**底辺** $\times$ **高さ** $\div 2$ です。

例題 3

直線 $y = -x + 6$ が x 軸、y 軸と交わる点をそれぞれ A、B とします。三角形 OAB の面積を求めなさい。

方針

x 軸との交点、y 軸との交点を求めます。その 2 点から底辺と高さを考えます。

解き方

x 軸との交点では、$y = 0$ です。

$$0 = -x + 6$$

より、$x = 6$ です。したがって、$A(6, 0)$ です。

y 軸との交点では、$x = 0$ です。

$$y = -0 + 6 = 6$$

より、$B(0, 6)$ です。

三角形 OAB は、底辺 $OA = 6$、高さ $OB = 6$ の直角三角形です。

$$6 \times 6 \div 2 = 18$$

答え

18

練習問題 3

直線 $y = 2x + 8$ が x 軸、y 軸と交わる点をそれぞれ A、B とします。三角形 OAB の面積を求めなさい。

解答解説 3

解き方

x 軸との交点では、$y = 0$ です。

$$0 = 2x + 8$$

より、$x = -4$ です。したがって、$A(-4, 0)$ です。

y 軸との交点では、$x = 0$ なので、$B(0, 8)$ です。

底辺は $OA = 4$、高さは $OB = 8$ です。

$$4 \times 8 \div 2 = 16$$

答え

16

3.2　2 直線と軸で囲まれる面積

交点を求めてから面積を考える

2 本の直線と軸で囲まれる図形では、まず**交点の座標**を求めます。その後、底辺や高さとして使える長さを図から読み取ります。

例題 4

直線 $y = x + 1$ と $y = -x + 5$ と x 軸で囲まれる三角形の面積を求めなさい。

方針

2 直線の交点と、それぞれの x 軸との交点を求めます。

解き方

2 直線の交点を求めます。

$$x + 1 = -x + 5$$

$$2x = 4$$

より、$x = 2$ です。

$y = x + 1$ に代入すると、

$$y = 3$$

なので、交点は $(2, 3)$ です。

x 軸との交点を求めます。

$y = x + 1$ で $y = 0$ とすると、$x = -1$ です。

$y = -x + 5$ で $y = 0$ とすると、$x = 5$ です。

底辺は x 軸上の長さで、$5 - (-1) = 6$ です。高さは交点の y 座標なので 3 です。

$$6 \times 3 \div 2 = 9$$

答え

9

練習問題 4

直線 $y = 2x + 2$ と $y = -x + 8$ と x 軸で囲まれる三角形の面積を求めなさい。

解答解説 4

解き方

交点を求めます。

$$2x + 2 = -x + 8$$

$$3x = 6$$

より、$x = 2$ です。

$y = 2x + 2$ に代入すると、$y = 6$ です。

x 軸との交点は、$y = 2x + 2$ では $x = -1$、$y = -x + 8$ では $x = 8$ です。

底辺は $8 - (-1) = 9$、高さは 6 です。

$$9 \times 6 \div 2 = 27$$

答え

27

4　二次関数 $y = ax^2$ の応用

4.1　点を通る二次関数

a を求める

二次関数 $y = ax^2$ がある点を通るとき、その点の x と y を式に代入して a を求めます。x^2 を先に計算することが大切です。

例題 5

二次関数 $y = ax^2$ が点 $(3, 18)$ を通ります。a の値を求めなさい。

方針

点 $(3, 18)$ を $y = ax^2$ に代入します。

解き方

$x = 3$、$y = 18$ を代入します。

$$18 = a \times 3^2$$

$$18 = 9a$$

両辺を 9 で割ります。

$$a = 2$$

答え

$$a = 2$$

練習問題 5

二次関数 $y = ax^2$ が点 $(-4, 32)$ を通ります。a の値を求めなさい。

解答解説 5

解き方

$x=-4$、$y=32$ を代入します。

$$32 = a \times (-4)^2$$

$$32 = 16a$$

したがって、

$$a = 2$$

です。

答え

$$a = 2$$

4.2 変化の割合を利用する

二次関数の変化の割合

二次関数 $y=ax^2$ の $x=p$ から $x=q$ までの変化の割合は、

$$\frac{aq^2 - ap^2}{q-p}$$

で求めます。計算後に因数分解できる場合があります。

例題 6

二次関数 $y = 2x^2$ について、x が 1 から 4 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

方針

$x = 1$ のときの y、$x = 4$ のときの y を求め、y の増加量を x の増加量で割ります。

解き方

$x = 1$ のとき、

$$y = 2 \times 1^2 = 2$$

です。

$x = 4$ のとき、

$$y = 2 \times 4^2 = 32$$

です。

y の増加量は、

$$32 - 2 = 30$$

です。

x の増加量は、

$$4 - 1 = 3$$

です。

したがって、変化の割合は、

$$30 \div 3 = 10$$

です。

答え

10

練習問題 6

二次関数 $y = 3x^2$ について、x が -2 から 1 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

解答解説 6

解き方

$x = -2$ のとき、

$$y = 3 \times (-2)^2 = 12$$

です。

$x = 1$ のとき、

$$y = 3 \times 1^2 = 3$$

です。

y の増加量は、

$$3 - 12 = -9$$

です。

x の増加量は、

$$1 - (-2) = 3$$

です。

したがって、変化の割合は、

$$-9 \div 3 = -3$$

です。

答え

-3

5　一次関数と二次関数の融合

5.1　直線と放物線の交点

交点では y が等しい

直線と放物線の交点では、それぞれの式の y の値が等しくなります。したがって、2 つの式を等しくおいて方程式を解きます。

例題 7

放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x + 2$ の交点の座標を求めなさい。

方針

$x^2 = x + 2$ として、二次方程式を解きます。

解き方

交点では、

$$x^2 = x + 2$$

が成り立ちます。

右辺を左辺に移項します。

$$x^2 - x - 2 = 0$$

因数分解すると、

$$(x-2)(x+1) = 0$$

です。

したがって、

$$x = 2,\ -1$$

です。

$x = 2$ のとき、$y = x + 2 = 4$ です。

$x = -1$ のとき、$y = x + 2 = 1$ です。

答え

$$(2, 4), \quad (-1, 1)$$

練習問題 7

放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 2x + 3$ の交点の座標を求めなさい。

解答解説 7

解き方

交点では、

$$x^2 = 2x + 3$$

です。

移項します。

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

因数分解すると、

$$(x-3)(x+1) = 0$$

です。

したがって、$x = 3, -1$ です。

$x = 3$ のとき、$y = 2 \times 3 + 3 = 9$ です。

$x = -1$ のとき、$y = 2 \times (-1) + 3 = 1$ です。

答え

$$(3, 9), \quad (-1, 1)$$

5.2 交点と面積

交点の座標から面積を作る

融合問題では、交点を求めたあとに面積を求めることがあります。座標を求めたら、底辺や高さとして使える長さを探します。

原点を含む三角形の面積公式

原点 $O(0,0)$、点 $A(a,b)$、点 $B(c,d)$ でできる三角形 OAB の面積は、次の式で求められます。

$$\text{面積} = \frac{|ad - bc|}{2}$$

この公式は中学数学の基本公式ではありませんが、**応用問題で計算を速く正確に進めるための公式**として使えます。

公式の証明

点 $A(a,b)$、点 $B(c,d)$ を使って、O、A、B を結びます。

三角形 OAB を 2 倍すると、OA と OB をとなり合う辺にもつ平行四辺形になります。

この平行四辺形の面積は、座標の横の長さと縦の長さの組み合わせから、

$$|ad - bc|$$

と表せます。

三角形 OAB はその半分なので、

$$\text{三角形}OAB\text{の面積} = \frac{|ad - bc|}{2}$$

となります。

絶対値をつけるのは、点 A と点 B の位置によって $ad - bc$ が負になることがあるためです。面積は必ず 0 以上なので、最後は正の値として考えます。

例題 8

放物線 $y = x^2$ と直線 $y = -x+6$ の交点を A、B とします。A、B と原点 O でできる三角形の面積を求めなさい。ただし、A は x 座標が小さい点とします。

方針

まず交点を求めます。三角形の面積は、座標を使って底辺と高さを考えます。

解き方

交点では、

$$x^2 = -x + 6$$

です。

移項します。

$$x^2 + x - 6 = 0$$

因数分解すると、

$$(x+3)(x-2) = 0$$

です。

したがって、$x = -3, 2$ です。

$y = x^2$ に代入すると、$A(-3, 9)$、$B(2, 4)$ です。

上で確認した公式を使います。$A(-3, 9)$、$B(2, 4)$ なので、

$$\frac{|(-3) \times 4 - 2 \times 9|}{2} = \frac{|-12-18|}{2} = 15$$

答え

15

練習問題 8

放物線 $y = x^2$ と直線 $y = -2x + 8$ の交点を A、B とします。A、B と原点 O でできる三角形の面積を求めなさい。

解答解説 8

解き方

交点では、

$$x^2 = -2x + 8$$

です。

移項します。

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

因数分解すると、

$$(x+4)(x-2) = 0$$

です。

したがって、$x = -4, 2$ です。

$y = x^2$ に代入すると、交点は $(-4, 16)$、$(2, 4)$ です。

公式を使って、三角形の面積は

$$\frac{|(-4) \times 4 - 2 \times 16|}{2} = \frac{|-16 - 32|}{2} = 24$$

です。

答え

24

6　動点と関数

6.1　時間と面積の関係

動点問題は変数を時間にする

動点問題では、点が動いた時間を x 秒などとおきます。長さや面積が時間によって変わるので、**何が変化しているか**を式で表します。

例題 9

底辺が 12cm、高さが 8cm の三角形があります。点 P が底辺上を毎秒 2cm で動きます。動き始めて x 秒後、P までの底辺の長さを $2x$cm とすると、できる三角形の面積 y を x の式で表しなさい。

方針

面積は底辺 $\times$ 高さ $\div 2$ です。底辺が時間によって変化することに注目します。

解き方

x 秒後の底辺の長さは、

$$2x$$

cm です。

高さは 8cm で一定です。

したがって、面積 y は、

$$y = 2x \times 8 \div 2$$

です。

整理すると、

$$y = 8x$$

です。

答え

$$y = 8x$$

練習問題 9

高さが 10cm の三角形で、点 P が底辺上を毎秒 3cm で動きます。動き始めて x 秒後の底辺の長さを $3x$cm とすると、面積 y を x の式で表しなさい。

解答解説 9

解き方

x 秒後の底辺の長さは $3x$cm です。

高さは 10cm で一定です。

面積は、

$$y = 3x \times 10 \div 2$$

です。

したがって、

$$y = 15x$$

です。

答え

$$y = 15x$$

6.2　範囲に注意する

変数の範囲を書く

動点問題では、式だけでなく、x がとれる範囲も大切です。点が辺の上を動く時間には限りがあるので、**定義域**を確認します。

例題 10

点 P が長さ 18cm の線分上を毎秒 3cm で動きます。動き始めて x 秒後に進んだ距離を $y$cm とします。y を x の式で表し、x の範囲も答えなさい。

方針

進んだ距離は速さ $\times$ 時間です。線分の長さが 18cm なので、進める時間の範囲を考えます。

解き方

毎秒 3cm で動くので、x 秒後に進んだ距離は、

$$y = 3x$$

です。

線分の長さは 18cm なので、進んだ距離は 18cm までです。

$$3x \leqq 18$$

より、

$$x \leqq 6$$

です。

また、時間は 0 秒以上なので、

$$0 \leqq x \leqq 6$$

です。

答え

$$y = 3x, \quad 0 \leqq x \leqq 6$$

練習問題 10

点 P が長さ 20cm の線分上を毎秒 4cm で動きます。動き始めて x 秒後に進んだ距離を $y$cm とします。y を x の式で表し、x の範囲も答えなさい。

解答解説 10

解き方

毎秒 4cm で動くので、

$$y = 4x$$

です。

線分の長さは 20cm なので、

$$4x \leqq 20$$

です。

したがって、

$$x \leqq 5$$

です。

時間は 0 秒以上なので、

$$0 \leqq x \leqq 5$$

です。

答え

$$y = 4x, \quad 0 \leqq x \leqq 5$$

7　入試大問につながる応用例題

7.1　条件から式を決める

条件を 1 つずつ式にする

入試の大問では、最初に式や座標を求め、その結果を使って次の問題を解くことが多いです。条件を読み落とさず、順番に式にしましょう。

例題 11

直線 l は点 $(0,4)$ を通り、放物線 $y=x^2$ と点 $(2,4)$ でも交わります。直線 l の式を求めなさい。

方針

直線は点 $(0,4)$ と $(2,4)$ を通ります。2 点を使って一次関数の式を求めます。

解き方

2 点 $(0,4)$、$(2,4)$ を通る直線です。

変化の割合は、

$$\frac{4-4}{2-0}=0$$

です。

変化の割合が 0 なので、直線は x 軸に平行です。

また、y の値は常に 4 です。

答え

$$y=4$$

練習問題 11

直線 l は点 $(0, 3)$ を通り、放物線 $y = x^2$ と点 $(-\sqrt{3}, 3)$ でも交わります。直線 l の式を求めなさい。

解答解説 11

解き方

2 点 $(0, 3)$、$(-\sqrt{3}, 3)$ を通る直線です。

2 点の y 座標がどちらも 3 なので、直線は x 軸に平行です。

したがって、y の値は常に 3 です。

答え

$$y = 3$$

7.2 グラフを使う最大・最小

範囲内での値を調べる

関数の値の最大・最小を考えるときは、指定された x の範囲を確認します。二次関数では、**頂点**や**範囲の端**の値を調べます。

例題 12

二次関数 $y = x^2$ について、$-1 \leqq x \leqq 3$ の範囲で、y の最小値と最大値を求めなさい。

方針

x^2 は 0 に近いほど小さく、絶対値が大きいほど大きくなります。範囲に 0 が含まれるか確認します。

解き方

範囲 $-1 \leqq x \leqq 3$ には、$x = 0$ が含まれます。

$x = 0$ のとき、

$$y = 0^2 = 0$$

なので、最小値は 0 です。

最大値は範囲の端で比べます。

$x = -1$ のとき、

$$y = (-1)^2 = 1$$

です。

$x = 3$ のとき、

$$y = 3^2 = 9$$

です。

したがって、最大値は 9 です。

答え

最小値：0、最大値：9

練習問題 12

二次関数 $y = 2x^2$ について、$-3 \leqq x \leqq 1$ の範囲で、y の最小値と最大値を求めなさい。

解答解説 12

解き方

範囲 $-3 \leqq x \leqq 1$ には、$x = 0$ が含まれます。

$x = 0$ のとき、

$$y = 2 \times 0^2 = 0$$

なので、最小値は 0 です。

最大値は範囲の端で比べます。

$x = -3$ のとき、

$$y = 2 \times (-3)^2 = 18$$

です。

$x = 1$ のとき、

$$y = 2 \times 1^2 = 2$$

です。

したがって、最大値は 18 です。

答え

最小値：0、最大値：18

8 単元まとめ練習問題

ここでは、関数の応用問題をまとめて確認します。式、座標、グラフ、面積のどれを使うかを考えて解きましょう。

8.1 問題

練習問題 まとめ 1

2 点 $(1, 2)$、$(5, 10)$ を通る直線の式を求めなさい。

練習問題 まとめ 2

直線 $y = -x + 7$ と x 軸、y 軸で囲まれる三角形の面積を求めなさい。

練習問題 まとめ 3

二次関数 $y = ax^2$ が点 $(2, 12)$ を通ります。a の値を求めなさい。

練習問題 まとめ 4

放物線 $y = x^2$ と直線 $y = -x + 2$ の交点の座標を求めなさい。

練習問題 まとめ 5

点 P が長さ 24cm の線分上を毎秒 6cm で動きます。x 秒後に進んだ距離を $y$cm とするとき、y を x の式で表し、x の範囲も答えなさい。

8.2　解答解説

解答解説 まとめ 1

解き方

変化の割合は、

$$a = \frac{10-2}{5-1} = 2$$

です。

式を $y = 2x + b$ とおき、点 $(1, 2)$ を代入します。

$$2 = 2 \times 1 + b$$

より、$b = 0$ です。

答え

$$y = 2x$$

解答解説 まとめ 2

解き方

x 軸との交点では、$y = 0$ です。

$$0 = -x + 7$$

より、$x = 7$ です。

y 軸との交点では、$x = 0$ なので、$y = 7$ です。

底辺、高さがどちらも 7 なので、面積は、

$$7 \times 7 \div 2 = \frac{49}{2}$$

です。

答え

$$\frac{49}{2}$$

解答解説 まとめ 3

解き方

点 $(2, 12)$ を $y = ax^2$ に代入します。

$$12 = a \times 2^2$$

$$12 = 4a$$

より、$a = 3$ です。

答え

$$a = 3$$

解答解説 まとめ 4

解き方

交点では、

$$x^2 = -x + 2$$

です。

移項します。

$$x^2 + x - 2 = 0$$

因数分解すると、

$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

です。

したがって、$x = -2, 1$ です。

$x = -2$ のとき、$y = 4$ です。

$x = 1$ のとき、$y = 1$ です。

答え

$$(-2, 4), \quad (1, 1)$$

解答解説 まとめ 5

解き方

毎秒 6cm で動くので、

$$y = 6x$$

です。

線分の長さは 24cm なので、

$$6x \leqq 24$$

より、$x \leqq 4$ です。

時間は 0 秒以上なので、

$$0 \leqq x \leqq 4$$

です。

答え

$$y = 6x, \quad 0 \leqq x \leqq 4$$

9　学習チェックリスト

チェックリスト

- □ 2 点から一次関数の式を求められる。
- □ 2 直線の交点を連立方程式で求められる。
- □ 座標平面上の三角形の面積を求められる。
- □ $y = ax^2$ の a を点の座標から求められる。
- □ 二次関数の変化の割合を求められる。
- □ 直線と放物線の交点を求められる。
- □ 動点問題で式と x の範囲を考えられる。
- □ 最大値・最小値を範囲に注意して求められる。

10　まとめ

関数・応用編の重要ポイント

- 2 点が分かると、一次関数の式を決められる。
- 交点では、2 つの式の y が等しくなる。
- 面積問題では、座標から底辺と高さを読み取る。
- $y = ax^2$ では、点の座標を代入して a を求める。
- 直線と放物線の交点は、二次方程式を解いて求める。
- 動点問題では、時間を文字でおき、変数の範囲も確認する。

次に取り組むこと

関数の応用問題が解けるようになったら、図形分野の問題にも進みましょう。入試では、関数と図形が組み合わさる問題がよく出ます。