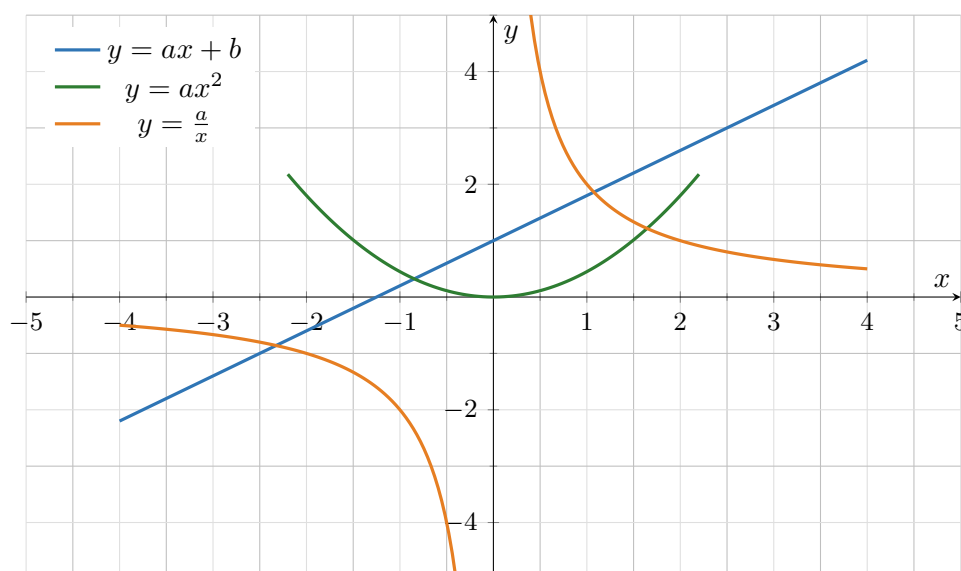


中学数学 関数の解き方

比例・反比例・一次関数・二次関数を基礎から復習



この教材の対象

偏差値 40～50 程度の中学生が、偏差値 50 以上を目指すための復習教材です。学校の授業、定期テスト、高校入試の基礎固めに使えます。

この教材で大切にすること

関数は、公式を丸暗記するだけでなく、**表・式・グラフのつながり**を理解することが大切です。問題を見たら、「何が一定か」「どこを読めばよいか」を考えましょう。

この教材の使い方

学習の進め方

- (1) まずは、比例・反比例・一次関数・二次関数の違いを整理する。
- (2) 次に、表から式、式からグラフ、グラフから式を読む練習をする。
- (3) 文章題では、何を x 、何を y にするかを決める。
- (4) 高校入試では、グラフの交点、変域、速さ、図形との融合問題に注意する。

目次

この教材の使い方	1
1 関数の基本	2
1.1 関数とは何か	2
1.2 表・式・グラフで見る	2
2 比例	3
2.1 比例の式と特徴	3
2.2 表から比例の式を作る	3
2.3 比例のグラフの読み方	4
3 反比例	5
3.1 反比例の式と特徴	5
3.2 反比例の式を求める	5
3.3 反比例のグラフの注意点	6
4 一次関数	7
4.1 一次関数の式	7
4.2 傾きの求め方	7
4.3 変化の割合	8
5 二次関数	9
5.1 二次関数の特徴	9
5.2 二次関数の式を求める	9
5.3 二次関数の変化の割合	10
6 高校入試で役立つ見方	11
6.1 グラフの交点	11
6.2 変域	11
6.3 文章題での見方	13
7 よくあるつまづき	14

8	高校入試でよく出る問題	15
8.1	問題のタイプ	15
8.2	動点問題の考え方	15
8.3	グラフから読み取る力	16
9	勉強法	17
10	練習問題	18
10.1	基本問題	18
10.2	高校入試に向けた問題	18
11	練習問題の解答・解説	19
11.1	基本問題 1 の解答	19
11.2	基本問題 2 の解答	19
11.3	基本問題 3 の解答	20
11.4	入試問題の解答	20
12	まとめ	22

1 関数の基本

1.1 関数とは何か

関数の考え方

一方の数量 x を決めると、それに対応してもう一方の数量 y がただ 1 つ決まるとき、 y は x の関数であるといえます。

$$x \longrightarrow y$$

関数では、 x を独立変数、 y を従属変数と考えると分かりやすくなります。

例題 1 関数になっているものを選ぶ

次のうち、 y が x の関数になっているものを選びなさい。

- (1) 1 個 120 円のノートを x 個買うときの代金 y 円
- (2) 身長 x cm の人の体重 y kg
- (3) 半径 x cm の円の面積 y cm²

解説

- (1) x 個買うと代金は必ず $120x$ 円に決まるので関数です。
- (2) 同じ身長でも体重は人によって違うため、ただ 1 つには決まりません。
- (3) 円の面積は $y = \pi x^2$ でただ 1 つに決まるので関数です。

答え：(1), (3)

確認ポイント： x を決めるとき、 y が 1 つに決まるかを見る。

1.2 表・式・グラフで見る

関数を表す 3 つの形

関数は、主に次の 3 つの形で表します。

表	x の値と y の値の対応を整理する。変化のようすが見やすい。
式	x と y の関係を文字で表す。計算しやすい。
グラフ	変化のようすを図で表す。増え方、交点、変域が見やすい。

高校入試では、表・式・グラフを行き来する力がよく問われます。

最初に意識すること

関数の問題で迷ったら、いきなり計算する前に、次の順に確認しましょう。

- (1) 何が x か、何が y か。
- (2) x が増えると、 y は増えるのか、減るのか。
- (3) 比例、反比例、一次関数、二次関数のどれに近いのか。

2 比例

2.1 比例の式と特徴

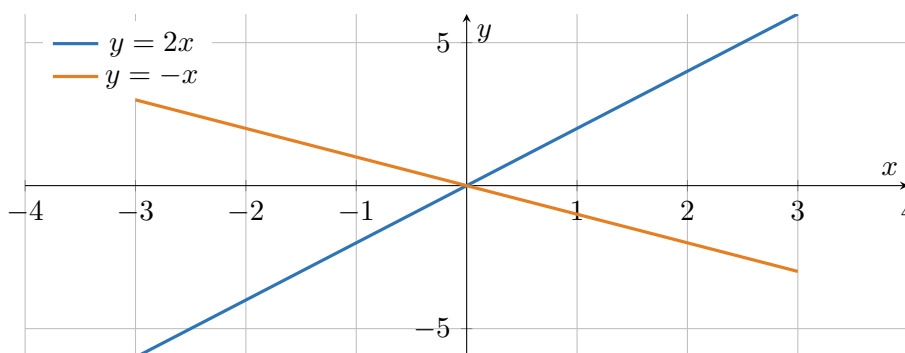
比例の基本公式

y が x に比例するとき、式は

$$y = ax$$

と表されます。 a を **比例定数** といいます。

- x が 2 倍、3 倍になると、 y も 2 倍、3 倍になる。
- グラフは **原点を通る直線** になる。
- $a > 0$ なら右上がり、 $a < 0$ なら右下がりになる。



2.2 表から比例の式を作る

例題 2 表から比例の式を求める

y が x に比例し、 $x = 4$ のとき $y = 12$ です。 y を x の式で表しなさい。

解説

比例の式は $y = ax$ です。 $x = 4$ 、 $y = 12$ を代入します。

$$12 = 4a$$

両辺を 4 で割ると、

$$a = 3$$

したがって、

$$y = 3x$$

答え： $y = 3x$

確認ポイント：比例では、 $a = \frac{y}{x}$ で比例定数を求める。

2.3 比例のグラフの読み方

比例のグラフをかく手順

比例のグラフは直線なので、2 点が分かればかけます。

- (1) 必ず通る点として、原点 $(0, 0)$ をとる。
- (2) もう 1 つ、分かりやすい点を式から求める。
- (3) 2 点を直線で結ぶ。

たとえば $y = 2x$ なら、 $x = 1$ のとき $y = 2$ なので、 $(0, 0)$ と $(1, 2)$ を結びます。

比例でよくあるミス

比例のグラフは必ず**原点を通る**直線です。 $y = 2x + 1$ のように、最後に $+1$ がある式は比例ではありません。

3 反比例

3.1 反比例の式と特徴

反比例の基本公式

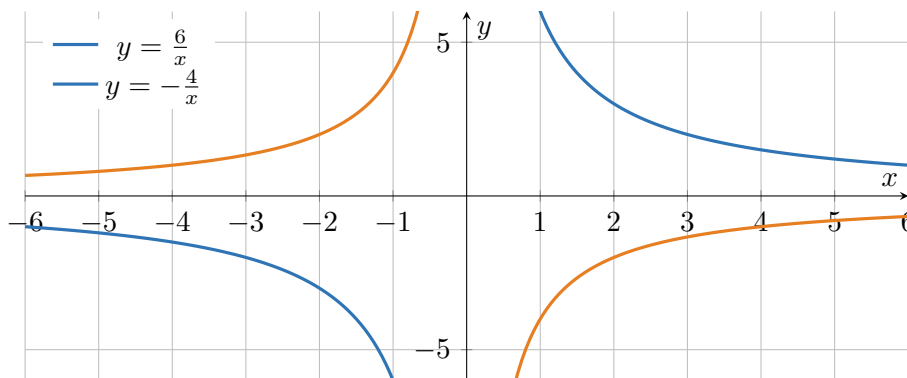
y が x に反比例するとき、式は

$$y = \frac{a}{x}$$

と表されます。両辺に x をかけると、

$$xy = a$$

となります。つまり、反比例では x と y の積が一定です。



3.2 反比例の式を求める

例題 3 反比例の式を求める

y が x に反比例し、 $x = 3$ のとき $y = 8$ です。 y を x の式で表しなさい。

解説

反比例の式は $y = \frac{a}{x}$ です。 $x = 3$ 、 $y = 8$ を代入します。

$$8 = \frac{a}{3}$$

両辺に 3 をかけると、

$$a = 24$$

したがって、

$$y = \frac{24}{x}$$

答え： $y = \frac{24}{x}$

確認ポイント：反比例では、 $a = xy$ で比例定数を求める。

3.3 反比例のグラフの注意点

反比例のグラフは直線ではない

反比例のグラフは、原点を通りません。また、 $x = 0$ のときは $y = \frac{a}{0}$ となり、計算できません。そのため、 $x = 0$ は使えないことに注意しましょう。

反比例のグラフの位置

- $a > 0$ のとき、グラフは第 1 象限と第 3 象限にある。
- $a < 0$ のとき、グラフは第 2 象限と第 4 象限にある。

符号を見るだけで、グラフのおよその位置を判断できます。

4 一次関数

4.1 一次関数の式

一次関数の基本公式

一次関数は、

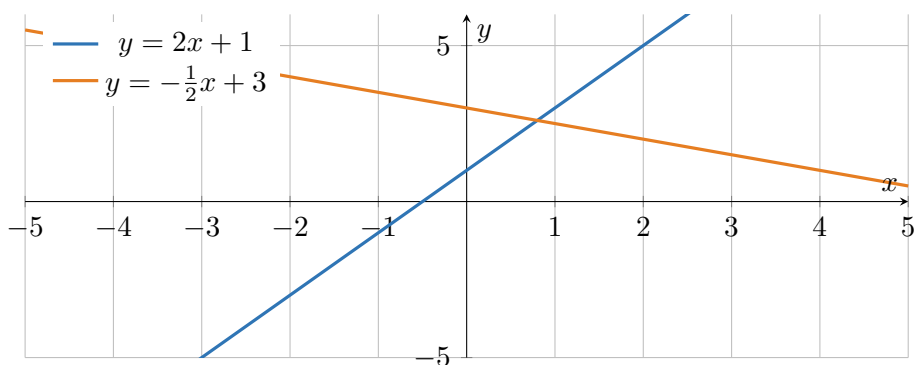
$$y = ax + b$$

で表されます。

a 傾き。 x が 1 増えたとき、 y がどれだけ変わるかを表す。

b 切片。グラフが y 軸と交わる点の y 座標を表す。

比例 $y = ax$ は、一次関数 $y = ax + b$ で $b = 0$ の場合と考えることができます。



4.2 傾きの求め方

傾きの公式

2 点 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) を通る直線の傾き a は、

$$a = \frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

で求められます。

例題 4 2点から一次関数の式を求める

2点 (1, 3)、(4, 9) を通る直線の式を求めなさい。

解説

まず傾きを求めます。

$$a = \frac{9 - 3}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2$$

よって、式は $y = 2x + b$ です。点 (1, 3) を代入します。

$$3 = 2 \times 1 + b$$

$$b = 1$$

したがって、

$$y = 2x + 1$$

答え： $y = 2x + 1$

確認ポイント： まず傾き、次に切片を求める。

4.3 変化の割合

変化の割合

一次関数では、変化の割合は常に一定で、傾き a と同じです。

$$\text{変化の割合} = \frac{y \text{の増加量}}{x \text{の増加量}} = a$$

たとえば $y = 3x - 2$ では、 x が 1 増えると y は 3 増えます。したがって、変化の割合は 3 です。

増加量の符号に注意

x の増加量や y の増加量は、引く順番をそろえます。

$$\frac{9 - 3}{4 - 1}$$

のように、分子と分母で同じ向きに引くことが大切です。

5 二次関数

5.1 二次関数の特徴

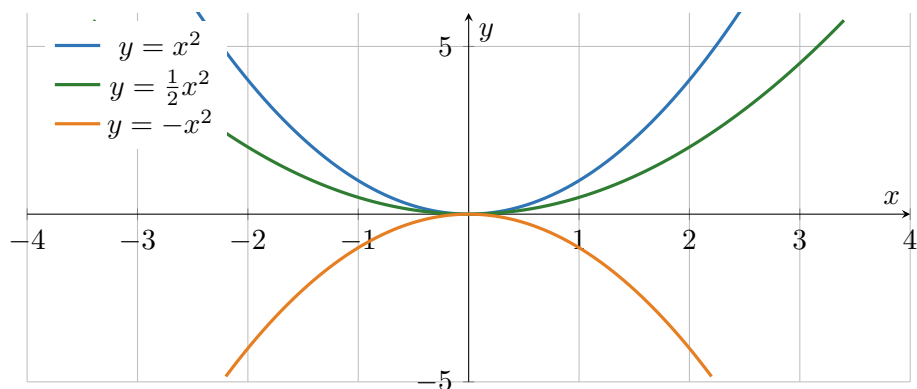
中学で学ぶ二次関数

中学で主に学ぶ二次関数は、

$$y = ax^2$$

です。特徴は次のとおりです。

- グラフは**放物線**になる。
- 原点を通り、 y 軸について対称になる。
- $a > 0$ なら上に開き、 $a < 0$ なら下に開く。
- $|a|$ が大きいほど、グラフの開き方はせまくなる。



5.2 二次関数の式を求める

例題 5 点を通る二次関数の式

二次関数 $y = ax^2$ のグラフが点 $(3, 18)$ を通ります。 a の値を求めなさい。

解説

$y = ax^2$ に $x = 3$ 、 $y = 18$ を代入します。

$$18 = a \times 3^2$$

$$18 = 9a$$

$$a = 2$$

答え： $a = 2$

確認ポイント： x^2 を計算してから、 a を求める。

5.3 二次関数の変化の割合

二次関数の変化の割合

二次関数 $y = ax^2$ では、変化の割合は一定ではありません。 x の値が変わる範囲によって変わります。

$$\text{変化の割合} = \frac{y \text{の増加量}}{x \text{の増加量}}$$

一次関数のように、式の a をそのまま答えにしないようにしましょう。

例題 6 二次関数の変化の割合

$y = 2x^2$ について、 x の値が 1 から 4 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

解説

まず、それぞれの y の値を求めます。

$$x = 1 \text{のとき、} y = 2 \times 1^2 = 2$$

$$x = 4 \text{のとき、} y = 2 \times 4^2 = 32$$

したがって、

$$\text{変化の割合} = \frac{32 - 2}{4 - 1} = \frac{30}{3} = 10$$

答え：10

確認ポイント：二次関数では、**始めと終わりの y の値**を求める。

6 高校入試で役立つ見方

6.1 グラフの交点

交点は連立方程式で求める

2つのグラフの交点は、2つの式を同時に満たす点です。したがって、**連立方程式**を解いて求めます。

例題 7 直線と放物線の交点

直線 $y = x + 2$ と放物線 $y = x^2$ の交点を求めなさい。

解説

交点では、2つの y が等しいので、

$$x^2 = x + 2$$

右辺を左辺に移項します。

$$x^2 - x - 2 = 0$$

因数分解すると、

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

よって、 $x = 2, -1$ です。

それぞれ $y = x + 2$ に代入すると、

$$x = 2 \text{ のとき、} y = 4$$

$$x = -1 \text{ のとき、} y = 1$$

答え：(2, 4)、(-1, 1)

確認ポイント：交点は、**式を等しくする**。

6.2 変域

変域の考え方

x のとる値の範囲を x の**変域**、 y のとる値の範囲を y の**変域**といいます。

- 一次関数では、端の x を代入して y の端を求める。
- 二次関数では、範囲の中に頂点や原点があるかに注意する。

例題 8 一次関数の変域

$y = -2x + 5$ で、 $1 \leq x \leq 4$ のとき、 y の変域を求めなさい。

解説

$x = 1$ のとき、

$$y = -2 \times 1 + 5 = 3$$

$x = 4$ のとき、

$$y = -2 \times 4 + 5 = -3$$

この直線は右下がりなので、 x が増えると y は減ります。

答え： $-3 \leq y \leq 3$

確認ポイント：変域は、小さい値を左、大きい値を右に書く。

例題 9 二次関数の変域

$y = 2x^2$ で、 $-3 \leq x \leq 4$ のとき、 y の変域を求めなさい。

解説

x の変域は、0 をまたいでいます。二次関数 $y = 2x^2$ では、 $x = 0$ のときに y が最も小さくなります。

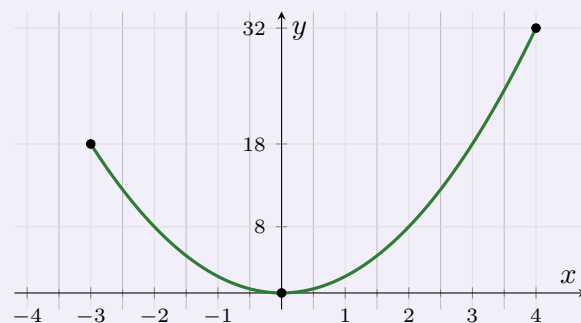
$$x = 0 \text{ のとき、} y = 2 \times 0^2 = 0$$

端の値も調べます。

$$x = -3 \text{ のとき、} y = 2 \times (-3)^2 = 18$$

$$x = 4 \text{ のとき、} y = 2 \times 4^2 = 32$$

したがって、 y の最小値は 0、最大値は 32 です。



答え： $0 \leq y \leq 32$

確認ポイント：0 をまたぐ範囲では、頂点で最小になることを確認する。

例題 10 二次関数の変域

$y = -x^2$ で、 $-3 < x < 5$ のとき、 y の変域を求めなさい。

解説

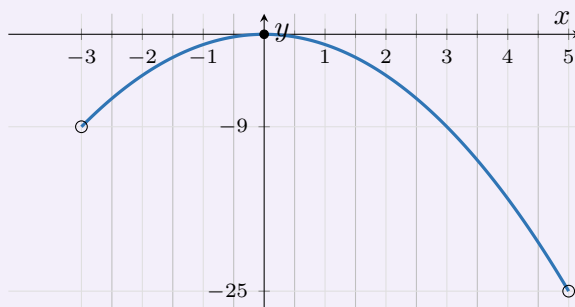
x の変域は、0 をまたいでいます。二次関数 $y = -x^2$ では、グラフが上にふくらむため、 $x = 0$ のときに y が最も大きくなります。

$$x = 0 \text{ のとき、} y = -(0)^2 = 0$$

次に、端の近くの値を考えます。

$$x = -3 \text{ の近くでは、} y \text{ は } -9 \text{ に近づく}$$

$$x = 5 \text{ の近くでは、} y \text{ は } -25 \text{ に近づく}$$



-25 の方が小さいですが、 $x < 5$ なので $x = 5$ は含まれません。したがって、 $y = -25$ も含まれません。

答え： $-25 < y \leq 0$

確認ポイント：0 をまたぐ範囲では、**原点で最大になるか最小になるか**を確認する。

6.3 文章題での見方

文章題の 3 ステップ

関数の文章題では、次の順に整理します。

- (1) 何を x 、何を y にするか決める。
- (2) 表を作って、変化のようすを見る。
- (3) 比例・反比例・一次関数・二次関数のどれかを判断する。

特に、**一定の割合で増える**ときは一次関数になりやすいです。

7 よくあるつまずき

つまずき 1 比例と一次関数を混同する

比例は $y = ax$ 、一次関数は $y = ax + b$ です。比例は一次関数の一部ですが、**比例のグラフは必ず原点を通る点**が大きな違いです。

つまずき 2 反比例で x

反比例 $y = \frac{a}{x}$ では、 $x = 0$ を代入できません。グラフも y 軸に近づきますが、 **y 軸とは交わりません**。

つまずき 3 二次関数の変化の割合を a と答える

一次関数では変化の割合は a ですが、二次関数では一定ではありません。必ず、

$$\frac{y \text{の増加量}}{x \text{の増加量}}$$

で計算します。

つまずき 4 変域の不等号の向き

y の変域を書くときは、必ず**小さい値を左、大きい値を右**にします。たとえば、 y が 3 から -5 まで変わる場合は、

$$-5 \leq y \leq 3$$

と書きます。

ミスを減らす確認リスト

- 式の形は合っているか。比例、反比例、一次関数、二次関数を区別したか。
- 代入する点の x と y を逆にしていないか。
- 変化の割合で、分子と分母の引く順番をそろえたか。
- 変域は小さい値から大きい値の順に書いたか。

8 高校入試でよく出る問題

8.1 問題のタイプ

出題されやすいテーマ

高校入試の関数では、次の問題がよく出ます。

- (1) グラフから式を求める問題
- (2) 2点から一次関数の式を求める問題
- (3) 直線と放物線の交点を求める問題
- (4) 変域を求める問題
- (5) 動点、速さ、面積と関数を組み合わせた問題

基本問題に見えても、図形や文章が加わると難しく感じます。まずは**式にする力**を固めましょう。

8.2 動点問題の考え方

動点問題は表を作る

点が動く問題では、時間を x 秒、長さや面積を y とすることが多いです。いきなり式を作るのではなく、

$$x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

のときの y を表にして、変化の規則を見つけましょう。

例題 11 速さと一次関数

Aさんは家から駅まで歩きます。家から駅までの距離は1200mで、毎分80mの速さで進みます。出発してから x 分後の残りの距離を y m とするとき、 y を x の式で表しなさい。

解説

x 分間に進む距離は $80x$ m です。残りの距離は、全体の距離から進んだ距離を引くので、

$$y = 1200 - 80x$$

答え： $y = 1200 - 80x$

確認ポイント：残りの量は、**全体 - 進んだ量**で表す。

8.3 グラフから読み取る力

グラフ読解のポイント

グラフの問題では、次のことを読み取ります。

- y 軸との交点：切片 b
- 右上がりか右下がりか：傾きの符号
- 2 点の座標：傾きを求める材料
- 交点：連立方程式で求める点

グラフに書き込むと、条件を見落としにくくなります。

例題 12 グラフから直線の式を考える

直線が点 $(0, 3)$ と点 $(2, -1)$ を通るとします。この直線の式を求めなさい。

解説

点 $(0, 3)$ を通るので、切片は 3 です。したがって、式は $y = ax + 3$ とおけます。

次に、点 $(2, -1)$ を代入します。

$$-1 = 2a + 3$$

$$2a = -4$$

$$a = -2$$

したがって、

$$y = -2x + 3$$

答え： $y = -2x + 3$

確認ポイント： y 軸との交点が分かると、**切片 b** をすぐに読める。

9 勉強法

関数のおすすめ勉強順

関数が苦手な人は、次の順に復習すると理解しやすくなります。

- (1) 座標の読み取りを練習する。
- (2) 比例と反比例の式を作れるようにする。
- (3) 一次関数で、傾きと切片を理解する。
- (4) 二次関数で、グラフの形と変化の割合を理解する。
- (5) 交点、変域、文章題を練習する。

苦手な人ほど、グラフを手でかく

関数は、式だけを見ているとイメージしにくい単元です。苦手な人ほど、座標をとって、グラフを手でかくことが大切です。表を作る、点を打つ、線を引くの流れをくり返しましょう。

定期テスト前の確認

- 比例定数を求められるか。
- 一次関数の傾きと切片を説明できるか。
- 2点から直線の式を求められるか。
- 二次関数の変化の割合を計算できるか。
- 変域を正しく不等号で書けるか。

10 練習問題

10.1 基本問題

基本問題 1 比例・反比例

次の問いに答えなさい。

- (1) y が x に比例し、 $x = 5$ のとき $y = 20$ である。 y を x の式で表しなさい。
- (2) y が x に反比例し、 $x = 4$ のとき $y = 6$ である。 y を x の式で表しなさい。
- (3) $y = \frac{12}{x}$ について、 $x = 3$ のときの y の値を求めなさい。

基本問題 2 一次関数

次の問いに答えなさい。

- (1) 一次関数 $y = 3x - 2$ の傾きと切片を答えなさい。
- (2) 点 $(2, 5)$ を通り、傾きが 4 である直線の式を求めなさい。
- (3) 2 点 $(1, 2)$ 、 $(3, 8)$ を通る直線の式を求めなさい。

基本問題 3 二次関数

次の問いに答えなさい。

- (1) $y = ax^2$ が点 $(2, 12)$ を通るとき、 a の値を求めなさい。
- (2) $y = 3x^2$ について、 x の値が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。
- (3) $y = -x^2$ のグラフは上に開くか、下に開くか答えなさい。

10.2 高校入試に向けた問題

入試問題 1 交点

直線 $y = 2x + 3$ と放物線 $y = x^2$ の交点を求めなさい。

入試問題 2 変域

一次関数 $y = -3x + 4$ で、 $-1 \leq x \leq 2$ のとき、 y の変域を求めなさい。

入試問題 3 文章題

水そうに毎分 5L ずつ水を入れます。はじめに水そうには 12L の水が入っています。水を入れ始めてから x 分後の水の量を y L とするとき、次の問いに答えなさい。

- (1) y を x の式で表しなさい。
- (2) 8 分後の水の量を求めなさい。
- (3) 水の量が 72L になるのは何分後か求めなさい。

11 練習問題の解答・解説

11.1 基本問題 1 の解答

基本問題 1 比例・反比例

(1) 比例の式は $y = ax$ 。 $x = 5$ 、 $y = 20$ を代入する。

$$20 = 5a \quad \text{よって} \quad a = 4$$

$$y = 4x$$

(2) 反比例の式は $y = \frac{a}{x}$ 。 $a = xy$ より、

$$a = 4 \times 6 = 24$$

$$y = \frac{24}{x}$$

(3) $x = 3$ を代入する。

$$y = \frac{12}{3} = 4$$

$$4$$

11.2 基本問題 2 の解答

基本問題 2 一次関数

(1) $y = 3x - 2$ は $y = ax + b$ と比べて、

$$\text{傾き}3, \text{切片} - 2$$

(2) 傾きが 4 なので、 $y = 4x + b$ 。 点 $(2, 5)$ を代入する。

$$5 = 4 \times 2 + b$$

$$b = -3$$

$$y = 4x - 3$$

(3) 傾きを求める。

$$a = \frac{8 - 2}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$$

よって $y = 3x + b$ 。 点 $(1, 2)$ を代入する。

$$2 = 3 \times 1 + b \quad \text{よって} \quad b = -1$$

$$y = 3x - 1$$

11.3 基本問題 3 の解答

基本問題 3 二次関数

(1) $y = ax^2$ に $(2, 12)$ を代入する。

$$12 = a \times 2^2 = 4a$$

$$a = 3$$

(2) $x = 1$ のとき、 $y = 3 \times 1^2 = 3$ 。 $x = 3$ のとき、 $y = 3 \times 3^2 = 27$ 。

$$\text{変化の割合} = \frac{27 - 3}{3 - 1} = \frac{24}{2} = 12$$

$$12$$

(3) $a = -1 < 0$ なので、グラフは下に開く。

$$\text{下に開く}$$

11.4 入試問題の解答

入試問題 1 交点

交点では、 $2x + 3 = x^2$ となる。

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

因数分解すると、

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

よって、 $x = 3, -1$ 。直線 $y = 2x + 3$ に代入する。

$$x = 3 \text{ のとき、} y = 9$$

$$x = -1 \text{ のとき、} y = 1$$

したがって、

$$(3, 9), (-1, 1)$$

入試問題 2 変域

$y = -3x + 4$ に端の値を代入する。

$$x = -1 \text{ のとき、} y = -3 \times (-1) + 4 = 7$$

$$x = 2 \text{ のとき、} y = -3 \times 2 + 4 = -2$$

この直線は右下がりなので、 y は 7 から -2 まで減る。変域は小さい値から書くので、

$$-2 \leq y \leq 7$$

入試問題 3 文章題

(1) はじめに 12L あり、毎分 5L ずつ増えるので、

$$y = 5x + 12$$

(2) $x = 8$ を代入する。

$$y = 5 \times 8 + 12 = 52$$

$$52\text{L}$$

(3) $y = 72$ を代入する。

$$72 = 5x + 12$$

$$60 = 5x$$

$$x = 12$$

$$12\text{分後}$$

12 まとめ

関数で必ず覚えたいこと

種類	式	特徴
比例	$y = ax$	原点を通る直線。 a は比例定数。
反比例	$y = \frac{a}{x}$	$xy = a$ 。グラフは曲線で、 $x = 0$ は使えない。
一次関数	$y = ax + b$	a は傾き、 b は切片。変化の割合は一定。
二次関数	$y = ax^2$	放物線。変化の割合は一定ではない。

高校入試に向けた最終確認

関数は、計算だけでなく、グラフや文章から情報を読み取る単元です。高校入試では、次の3つを意識しましょう。

- (1) **式を作る力**：表、点、文章から式を作る。
- (2) **グラフを読む力**：傾き、切片、交点、変域を読む。
- (3) **説明する力**：途中式を省略せず、なぜそうなるかを書けるようにする。

この3つを意識して練習すると、関数の問題で点を取りやすくなります。