中学数学

平面図形と空間図形

応用編

偏差値55以上を目指す入試応用対策

角度・面積・体積・表面積を組み合わせて、
入試の中問から大問レベルまで練習します。

KmKmの学習支援サイト

目次

1　この教材の使い方

この教材は、平面図形と空間図形の応用問題に取り組むための教材です。合同と相似は別教材で扱うため、この教材では、角度、面積、円、おうぎ形、体積、表面積を組み合わせる問題を中心に扱います。

学習の進め方

1. まず「ポイント」で、応用問題で使う見方を確認します。
2. 例題では、「どの条件を使うか」を方針で確認します。
3. 解き方では、図のどこに注目しているかを意識します。
4. 練習問題では、同じ考え方を自分で説明できるか確認します。

注意 応用問題で大切にすること

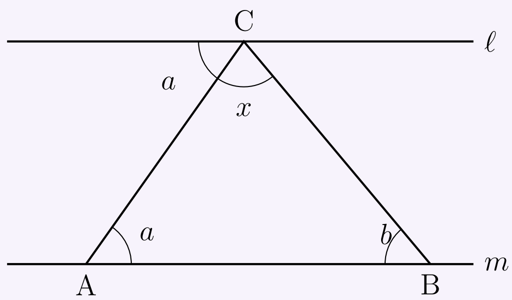
応用問題では、公式を覚えているだけでは足りません。図の中から、**等しい角、平行線、底辺と高さ、半径、底面積**を見つけて、必要な情報を順番に取り出すことが大切です。

2　角度の応用問題

2.1　平行線と三角形の角

平行線と三角形の角を組み合わせる

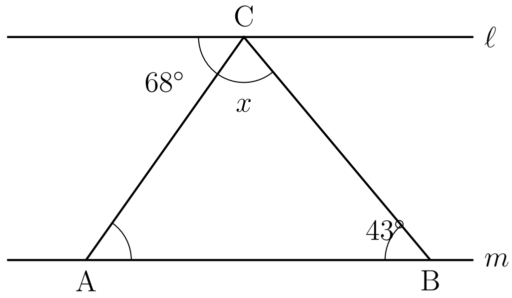
平行線では同位角・錯角が等しくなります。また、三角形の内角の和は 180° です。応用問題では、**平行線で求めた角度を三角形に移して**考えます。



上の図では、$\ell \parallel m$ より、上の a と左下の a は錯角で等しくなります。そのあと、三角形の内角の和を使って x を求めます。

例題 1

次の図で、$\ell \parallel m$ のとき、x の大きさを求めなさい。



方針

平行線の錯角を使って、三角形の左下の角を求めます。そのあと、三角形の内角の和を使います。

解き方

$\ell \parallel m$ なので、上の 68° の角と、三角形の左下の角は錯角で等しくなります。

したがって、三角形の左下の角は 68° です。

三角形の内角の和は 180° なので、

$$x = 180^\circ - 68^\circ - 43^\circ$$

です。

計算すると、

$$x = 69^\circ$$

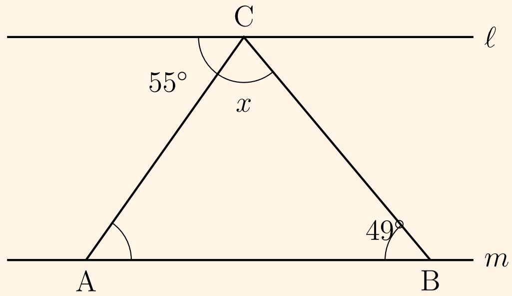
です。

答え

$$69^\circ$$

練習問題 1

次の図で、$\ell \parallel m$ のとき、x の大きさを求めなさい。



解答解説 1

解き方

$\ell \parallel m$ なので、上の 55° の角と、三角形の左下の角は錯角で等しくなります。

したがって、三角形の左下の角は 55° です。

三角形の内角の和は 180° なので、

$$x = 180^\circ - 55^\circ - 49^\circ = 76^\circ$$

です。

答え

$$76^\circ$$

2.2 多角形の外角の利用

外角を使う応用問題

多角形の外角の和は、何角形でも 360° です。正多角形では、1 つの外角の大きさを求めてから、内角を求めることができます。

$$1\text{ つの外角} = 360^\circ \div n$$

$$1\text{ つの内角} = 180^\circ - 1\text{ つの外角}$$

例題 2

正十二角形の 1 つの内角の大きさを求めなさい。

方針

外角の和が 360° であることを使います。

解き方

正十二角形では、12 個の外角がすべて等しくなります。

1 つの外角は、

$$360^\circ \div 12 = 30^\circ$$

です。

1 つの内角と外角は一直線をつくるので、

$$180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

です。

答え

$$150^\circ$$

練習問題 2

正十五角形の 1 つの内角の大きさを求めなさい。

解答解説 2

解き方

外角の和は 360° です。

正十五角形では、1 つの外角は、

$$360^\circ \div 15 = 24^\circ$$

です。

したがって、1 つの内角は、

$$180^\circ - 24^\circ = 156^\circ$$

です。

答え

$$156^\circ$$

3　面積の応用問題

3.1　同じ高さを使う面積比

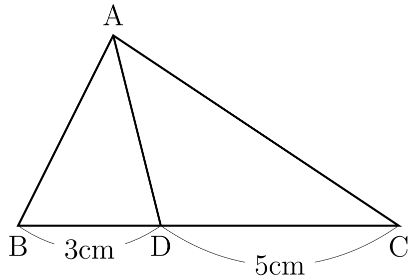
同じ高さなら底辺で比べる

三角形の面積は、底辺 $\times$ 高さ $\div 2$ です。高さが同じ三角形では、面積の比は底辺の比と同じになります。

$$\text{高さが同じ三角形の面積比} = \text{底辺の比}$$

例題 3

次の図で、$BD = 3\text{cm}$、$DC = 5\text{cm}$、三角形 ABC の面積が 48cm^2 のとき、三角形 ABD の面積を求めなさい。



方針

三角形 ABD と三角形 ACD は高さが同じなので、面積の比は底辺の比で考えます。

解き方

三角形 ABD と三角形 ACD は、どちらも頂点 A から直線 BC までの高さが同じです。

したがって、面積の比は、

$$BD : DC = 3 : 5$$

です。

三角形 ABC の底辺 BC は、

$$3 + 5 = 8$$

です。

三角形 ABD は全体の $\frac{3}{8}$ なので、

$$48 \times \frac{3}{8} = 18$$

です。

答え

$$18\text{cm}^2$$

練習問題 3

三角形 ABC で、点 D は辺 BC 上にあります。$BD = 4\text{cm}$、$DC = 6\text{cm}$、三角形 ABC の面積が 60cm^2 のとき、三角形 ACD の面積を求めなさい。

解答解説 3

解き方

三角形 ABD と三角形 ACD は高さが同じなので、面積の比は底辺の比と同じです。

$BD : DC = 4 : 6 = 2 : 3$ です。

三角形 ACD は全体の、

$$\frac{6}{4+6} = \frac{3}{5}$$

です。

したがって、

$$60 \times \frac{3}{5} = 36$$

です。

答え

$$36\text{cm}^2$$

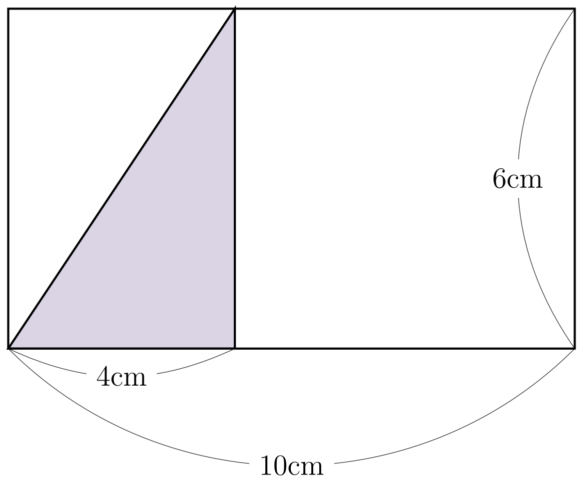
3.2 面積を分けて求める

複合図形の面積

複雑な図形は、三角形、四角形、おうぎ形など、知っている図形に分けて考えます。引く部分がある場合は、**全体から不要な部分を引く**と考えると整理しやすくなります。

例題 4

次の図は、縦 6cm、横 10cm の長方形から、底辺 4cm、高さ 6cm の三角形を取り除いた図形です。色のついていない部分の面積を求めなさい。



方針

長方形の面積から、取り除いた三角形の面積を引きます。

解き方

長方形の面積は、

$$10 \times 6 = 60$$

です。

取り除いた三角形の面積は、底辺 4cm、高さ 6cm なので、

$$4 \times 6 \div 2 = 12$$

です。

したがって、求める面積は、

$$60 - 12 = 48$$

です。

答え

$$48\text{cm}^2$$

練習問題 4

縦 8cm、横 12cm の長方形から、底辺 5cm、高さ 8cm の三角形を取り除いた図形の面積を求めなさい。

解答解説 4

解き方

長方形の面積は、

$$12 \times 8 = 96$$

です。

取り除いた三角形の面積は、

$$5 \times 8 \div 2 = 20$$

です。

したがって、

$$96 - 20 = 76$$

です。

答え

$$76\mathrm{cm}^2$$

4　円とおうぎ形の応用問題

4.1　おうぎ形の面積と弧の長さ

おうぎ形は割合で考える

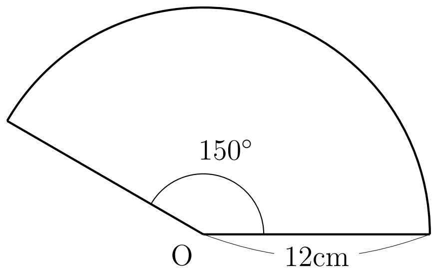
中心角が a° のおうぎ形では、円全体の $\dfrac{a}{360}$ 倍として考えます。

$$\text{おうぎ形の面積} = \pi r^2 \times \frac{a}{360}$$

$$\text{弧の長さ} = 2\pi r \times \frac{a}{360}$$

例題 5

半径 12cm、中心角 150° のおうぎ形の弧の長さを求めなさい。



方針

円周を求めてから、中心角の割合をかけます。

解き方

半径 12cm の円周は、

$$2\pi \times 12 = 24\pi$$

です。

中心角は 150° なので、円全体の、

$$\frac{150}{360} = \frac{5}{12}$$

です。

したがって、弧の長さは、

$$24\pi \times \frac{5}{12} = 10\pi$$

です。

答え

10πcm

練習問題 5

半径 9cm、中心角 80° のおうぎ形の弧の長さを求めなさい。

解答解説 5

解き方

半径 9cm の円周は、

$$2\pi \times 9 = 18\pi$$

です。

中心角は $80°$ なので、円全体の、

$$\frac{80}{360} = \frac{2}{9}$$

です。

したがって、

$$18\pi \times \frac{2}{9} = 4\pi$$

です。

答え

$$4\pi\mathrm{cm}$$

4.2　半径と弧の長さから中心角を求める

弧の長さから割合を逆に求める

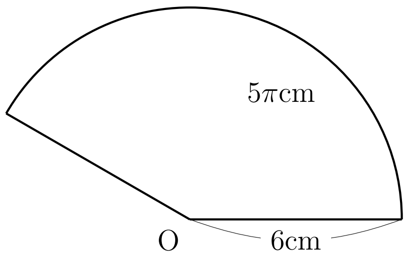
弧の長さが分かっているときは、

$$\frac{\text{弧の長さ}}{\text{円周}} = \frac{\text{中心角}}{360}$$

を使って、中心角を逆に求めます。

例題 6

半径 6cm のおうぎ形の弧の長さが 5πcm です。このおうぎ形の中心角を求めなさい。



方針

円周を求め、弧の長さが円周の何倍かを考えてから中心角を求めます。

解き方

半径 6cm の円周は、

$$2\pi \times 6 = 12\pi$$

です。

弧の長さは 5πcm なので、円周の、

$$\frac{5\pi}{12\pi} = \frac{5}{12}$$

です。

したがって、中心角は、

$$360^\circ \times \frac{5}{12} = 150^\circ$$

です。

答え

$$150^\circ$$

練習問題 6

半径 9cm のおうぎ形の弧の長さが 4πcm です。このおうぎ形の中心角を求めなさい。

解答解説 6

解き方

半径 9cm の円周は、

$$2\pi \times 9 = 18\pi$$

です。

弧の長さは 4πcm なので、円周の、

$$\frac{4\pi}{18\pi} = \frac{2}{9}$$

です。

したがって、中心角は、

$$360^\circ \times \frac{2}{9} = 80^\circ$$

です。

答え

$$80^\circ$$

5　立体の体積の応用問題

5.1　複数の立体を組み合わせる

体積の組み合わせ

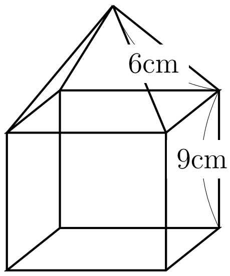
立体の体積は、基本の公式を使って部分ごとに求めます。

$$\text{柱体の体積} = \text{底面積} \times \text{高さ}$$

$$\text{錐体の体積} = \text{底面積} \times \text{高さ} \div 3$$

例題 7

底面積が 40cm^2、高さが 9cm の角柱の上に、同じ底面積で高さが 6cm の角錐がのっています。この立体全体の体積を求めなさい。



方針

角柱の体積と角錐の体積を別々に求めて、足します。

解き方

角柱の体積は、

$$40 \times 9 = 360$$

です。

角錐の体積は、

$$40 \times 6 \div 3 = 80$$

です。

したがって、全体の体積は、

$$360 + 80 = 440$$

です。

答え

$$440\text{cm}^3$$

練習問題 7

底面積が 54cm^2、高さが 8cm の角柱の上に、同じ底面積で高さが 5cm の角錐がのっています。この立体全体の体積を求めなさい。

解答解説 7

解き方

角柱の体積は、

$$54 \times 8 = 432$$

です。

角錐の体積は、

$$54 \times 5 \div 3 = 90$$

です。

したがって、

$$432 + 90 = 522$$

です。

答え

$$522\mathrm{cm}^3$$

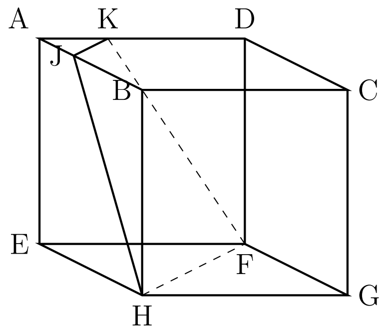
5.2　切り口を含む体積

相似な断面に注目する

切り口を含む立体では、上の面と下の面にできる図形が**相似**になることがあります。相似な 2 つの面をもつ立体は、大きな錐体から小さな錐体を引いた**錐台**として考えると整理しやすくなります。

例題 8

右の図のように、1 辺 6cm の立方体がある。$AJ = AK = 2\text{cm}$ である。4 点 J, K, H, F を通る平面で 2 つの立体に分ける。頂点 A を含むほう（小さいほう）の立体の体積を求めよ。



方針

上の $\triangle AJK$ と下の $\triangle EFH$ に注目し、錐台として考えます。

解き方

$\triangle AJK$ の面積は、

$$2 \times 2 \div 2 = 2$$

cm^2 です。

$\triangle EFH$ の面積は、

$$6 \times 6 \div 2 = 18$$

cm^2 です。

$\triangle AJK$ と $\triangle EFH$ の相似比は $2 : 6 = 1 : 3$ なので、対応する三角錐の高さの比も $1 : 3$ です。実際の立体の高さは 6cm だから、小さい三角錐の高さは 3cm、大きい三角錐の高さは 9cm です。

したがって、求める体積は、

$$18 \times 9 \div 3 - 2 \times 3 \div 3 = 54 - 2 = 52$$

です。

答え

$$52\text{cm}^3$$

練習問題 8

左の図と同じく、1 辺 6cm の立方体がある。$AJ = AK = 3\text{cm}$ である。4 点 J, K, H, F を通る平面で 2 つの立体に分ける。頂点 A を含むほう（小さいほう）の立体の体積を求めなさい。

解答解説 8

解き方

上の三角形 AJK は、$AJ = AK = 3\text{cm}$ の直角三角形なので、面積は、

$$3 \times 3 \div 2 = \frac{9}{2}$$

cm^2 です。

下の三角形 EFH の面積は、

$$6 \times 6 \div 2 = 18$$

cm^2 です。

相似比は

$$3 : 6 = 1 : 2$$

なので、高さの比も $1 : 2$ です。

実際の立体の高さは 6cm なので、小さい三角錐の高さを 6cm、大きい三角錐の高さを 12cm とすると、その差が 6cm になります。

大きい三角錐の体積は、

$$18 \times 12 \div 3 = 72$$

cm^3、小さい三角錐の体積は、

$$\frac{9}{2} \times 6 \div 3 = 9$$

cm^3 です。

したがって、求める体積は、

$$72 - 9 = 63$$

です。

答え

$$63\text{cm}^3$$

6　表面積と球の応用問題

6.1　円錐の表面積

円錐の表面積の考え方

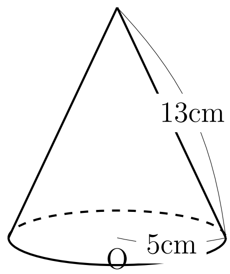
円錐の表面積は、**底面の円**の面積と、**側面のおうぎ形**の面積を足して求めます。

$$\text{円錐の表面積} = \pi r^2 + \pi r\ell$$

ここで、r は底面の半径、ℓ は母線です。

例題 9

底面の半径が 5cm、母線が 13cm の円錐の表面積を求めなさい。



方針

底面の面積と側面積を別々に求めて、足します。

解き方

底面の面積は、

$$\pi \times 5^2 = 25\pi$$

です。

側面積は、

$$\pi \times 5 \times 13 = 65\pi$$

です。

したがって、表面積は、

$$25\pi + 65\pi = 90\pi$$

です。

答え

$$90\pi \mathrm{cm}^2$$

練習問題 9

底面の半径が 4cm、母線が 9cm の円錐の表面積を求めなさい。

解答解説 9

解き方

底面の面積は、

$$\pi \times 4^2 = 16\pi$$

です。

側面積は、

$$\pi \times 4 \times 9 = 36\pi$$

です。

したがって、表面積は、

$$16\pi + 36\pi = 52\pi$$

です。

答え

$$52\pi \mathrm{cm}^2$$

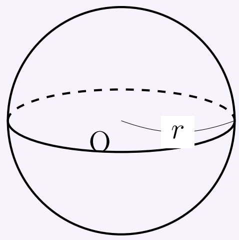
6.2　球の体積と表面積

球の公式

半径を r とすると、球の体積と表面積は次の公式で求めます。

$$\text{球の体積} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\text{球の表面積} = 4\pi r^2$$



例題 10

半径 6cm の球について、体積と表面積を求めなさい。

方針

球の体積と表面積の公式に、半径 6 を代入します。

解き方

球の体積は、

$$\frac{4}{3}\pi r^3$$

です。

半径は 6cm なので、

$$\frac{4}{3}\pi \times 6^3 = \frac{4}{3}\pi \times 216 = 288\pi$$

です。

球の表面積は、

$$4\pi r^2$$

です。

したがって、

$$4\pi \times 6^2 = 4\pi \times 36 = 144\pi$$

です。

答え

体積：$288\pi\mathrm{cm}^3$

表面積：$144\pi\mathrm{cm}^2$

練習問題 10

半径 3cm の球について、体積と表面積を求めなさい。

解答解説 10

解き方

体積は、

$$\frac{4}{3}\pi \times 3^3 = \frac{4}{3}\pi \times 27 = 36\pi$$

です。

表面積は、

$$4\pi \times 3^2 = 4\pi \times 9 = 36\pi$$

です。

答え

体積：$36\pi\mathrm{cm}^3$

表面積：$36\pi\mathrm{cm}^2$

7　入試応用練習

7.1　問題

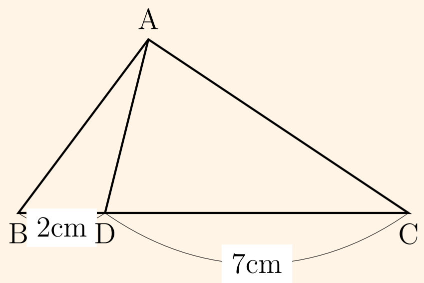
ここでは、平面図形と空間図形の応用問題をまとめて確認します。

練習問題 まとめ 1

正二十角形の 1 つの内角の大きさを求めなさい。

練習問題 まとめ 2

三角形 ABC で、点 D は辺 BC 上にあります。$BD = 2\text{cm}$、$DC = 7\text{cm}$、三角形 ABC の面積が 81cm^2 のとき、三角形 ACD の面積を求めなさい。



練習問題 まとめ 3

半径 10cm、中心角 72° のおうぎ形の面積を求めなさい。

練習問題 まとめ 4

底面積が 63cm^2、高さが 12cm の角柱の上に、同じ底面積で高さが 9cm の角錐がのっています。この立体全体の体積を求めなさい。

練習問題 まとめ 5

底面の半径が 6cm、母線が 10cm の円錐の表面積を求めなさい。

7.2 解答解説

解答解説 まとめ 1

解き方

外角の和は 360° です。

正二十角形の 1 つの外角は、

$$360^\circ \div 20 = 18^\circ$$

です。

したがって、1 つの内角は、

$$180^\circ - 18^\circ = 162^\circ$$

です。

答え

$$162^\circ$$

解答解説 まとめ 2

解き方

三角形 ABD と三角形 ACD は高さが同じです。

面積の比は、底辺の比と同じなので、

$$BD : DC = 2 : 7$$

です。

三角形 ACD は全体の、

$$\frac{7}{2+7} = \frac{7}{9}$$

です。

したがって、

$$81 \times \frac{7}{9} = 63$$

です。

答え

$$63\text{cm}^2$$

解答解説 まとめ 3

解き方

半径 10cm の円の面積は、

$$\pi \times 10^2 = 100\pi$$

です。

中心角は 72° なので、円全体の、

$$\frac{72}{360} = \frac{1}{5}$$

です。

したがって、おうぎ形の面積は、

$$100\pi \times \frac{1}{5} = 20\pi$$

です。

答え

$$20\pi\mathrm{cm}^2$$

解答解説 まとめ 4

解き方

角柱の体積は、

$$63 \times 12 = 756$$

です。

角錐の体積は、

$$63 \times 9 \div 3 = 189$$

です。

したがって、全体の体積は、

$$756 + 189 = 945$$

です。

答え

$$945\mathrm{cm}^3$$

解答解説 まとめ 5

解き方

底面の面積は、

$$\pi \times 6^2 = 36\pi$$

です。

側面積は、

$$\pi \times 6 \times 10 = 60\pi$$

です。

したがって、表面積は、

$$36\pi + 60\pi = 96\pi$$

です。

答え

$$96\pi \mathrm{cm}^2$$

8　学習チェックリスト

次の項目を確認し、できるようになったものにチェックを入れましょう。

チェックリスト

- □平行線と三角形の角を組み合わせて角度を求められる。
- □多角形の外角の和を使って内角を求められる。
- □高さが同じ三角形の面積比を使える。
- □複合図形の面積を、分けたり引いたりして求められる。
- □おうぎ形の面積と弧の長さを割合で求められる。
- □半径と弧の長さから中心角を求められる。
- □柱体と錐体を組み合わせた体積を求められる。
- □切り口を含む立体を、相似な図形に注目して求められる。
- □円錐や球の表面積・体積を正しく求められる。

9　まとめ

平面図形と空間図形・応用編のまとめ

- 角度問題では、平行線、三角形の内角の和、多角形の外角の和を組み合わせて考える。
- 面積問題では、同じ高さの三角形は底辺の比で面積を比べられる。
- 複合図形では、全体から不要な部分を引く、または部分に分けて足す。
- おうぎ形では、中心角を 360° に対する割合として考え、弧の長さから中心角を逆に求めることもできる。
- 体積問題では、柱体と錐体を部分ごとに分けて計算し、切り口があるときは相似な断面に注目する。
- 円錐の表面積は、底面の面積と側面積を足して求める。
- 球では、体積 $\frac{4}{3}\pi r^3$、表面積 $4\pi r^2$ を正確に使う。

次に取り組むこと

平面図形と空間図形の応用問題に慣れてきたら、合同、相似、円周角、三平方の定理へ進みましょう。入試では、これらの単元が組み合わさって大問になることが多くあります。