中学数学
三平方の定理

応用編

偏差値 55 以上を目指す入試応用対策

三平方の定理を、平面図形・円・座標・立体の問題と結びつけ、
入試大問につながる応用問題で使える形まで練習します。

KmKm の学習支援サイト

目次

1 この教材の使い方 2
2 隠れた直角三角形を見つける 3
2.1 補助線から直角三角形を作る 3
2.2 2 回使って長さを求める 6
3 面積と三平方の定理 9
3.1 高さを求めて面積を出す 9
3.2 対角線から正方形の面積を求める 12
4 座標平面への応用 15
4.1 2 点間の距離 15
4.2 座標から直角三角形を判断する 18
5 円への応用 20
5.1 接線と半径 20
5.2 弦の長さを求める 23
6 立体への応用 26
6.1 直方体の対角線 26
6.2 正四角錐に三平方の定理を用いる 29
7 入試大問につながる総合問題 33
7.1 条件から線分を順番に求める 33
7.2 複数の候補を比べる 36
8 単元まとめ練習問題 38
8.1 問題 38
8.2 解答解説 40
9 学習チェックリスト 46
10 まとめ 47

1　この教材の使い方

この教材は、三平方の定理の基礎・標準を学んだあと、入試で差がつく応用問題に対応するための教材です。公式に代入するだけでなく、図の中から直角三角形を作り、必要な長さを順番に求める力を身につけます。

応用編で意識すること

1. 図の中にある直角三角形を探します。
2. 直角三角形が見えないときは、補助線や対角線を引いて作ります。
3. 1 回で求まらない問題では、先に必要な長さを求めます。
4. 円、座標、立体では、三平方の定理を使う場所を自分で判断します。

注意 応用問題で大切にすること

応用問題では、すぐに計算を始めるより、まず**どの直角三角形を使うか**を決めることが大切です。求めたい長さが直角三角形のどの辺にあたるかを確認してから式を作りましょう。

2　隠れた直角三角形を見つける

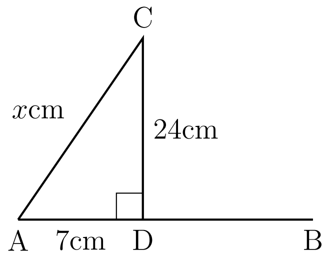
2.1　補助線から直角三角形を作る

補助線の見方

図の中に直角三角形がそのまま見えないときは、垂線や対角線を引いて直角三角形を作ります。入試問題では、**見えない直角三角形を作る力**が重要です。

例題 1

次の図で、$AD = 7\text{cm}$、$CD = 24\text{cm}$、$CD \perp AB$ です。AC の長さを求めなさい。



方針

$CD \perp AB$ より、三角形 ACD は直角三角形です。

解き方

三角形 ACD で、直角をはさむ 2 辺は 7cm と 24cm です。

AC を $x$cm とすると、三平方の定理より、

$$7^2 + 24^2 = x^2$$

です。

計算すると、

$$49 + 576 = x^2$$

$$625 = x^2$$

長さは正なので、

$$x = 25$$

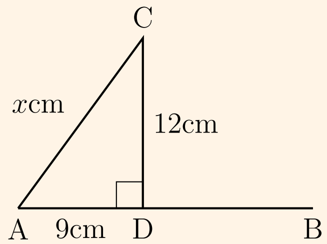
です。

答え

25cm

練習問題 1

$AD = 9\text{cm}$、$CD = 12\text{cm}$、$CD \perp AB$ です。AC の長さを求めなさい。



解答解説 1

解き方

三角形 ACD は直角三角形です。

AC を $x$cm とすると、

$$9^2 + 12^2 = x^2$$

$$81 + 144 = x^2$$

$$225 = x^2$$

長さは正なので、$x = 15$ です。

答え

15cm

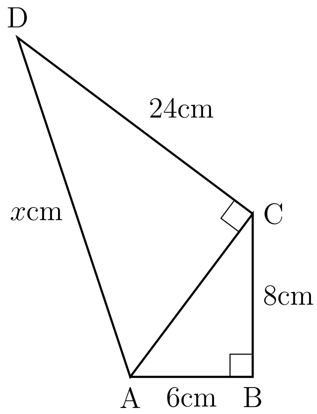
2.2　2 回使って長さを求める

2 回使う問題

1 回目の三平方の定理で途中の長さを求め、その長さを使って 2 回目の三平方の定理を使う問題があります。**どの順番で長さを求めるか**を決めることが大切です。

例題 2

図で、$\angle ABC = 90°$、$\angle ACD = 90°$、$AB = 6\text{cm}$、$BC = 8\text{cm}$、$CD = 24\text{cm}$ です。AD の長さを求めなさい。



方針

まず三角形 ABC で AC を求め、次に三角形 ACD で AD を求めます。

解き方

三角形 ABC で、

$$AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100$$

より、

$$AC = 10$$

です。

次に、三角形 ACD で AD を $x$cm とすると、

$$10^2 + 24^2 = x^2$$

$$100 + 576 = x^2 = 676$$

となるので、

$$x = 26$$

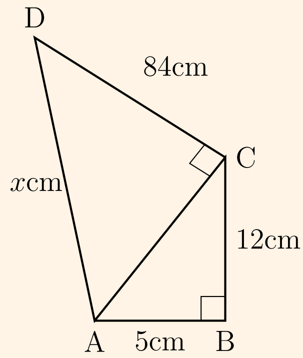
です。

答え

26cm

練習問題 2

$\angle ABC = 90^\circ$、$\angle ACD = 90^\circ$、$AB = 5\mathrm{cm}$、$BC = 12\mathrm{cm}$、$CD = 84\mathrm{cm}$ です。AD の長さを求めなさい。



解答解説 2

解き方

まず三角形 ABC で AC を求めます。

$$AC^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$$

より、$AC = 13$ です。

次に三角形 ACD で、AD を $x\mathrm{cm}$ とします。

$$13^2 + 84^2 = x^2$$

$$169 + 7056 = x^2$$

$$7225 = x^2$$

よって、$x = 85$ です。

答え

85cm

3　面積と三平方の定理

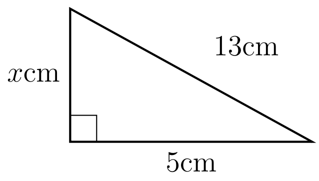
3.1　高さを求めて面積を出す

面積問題での使い方

三角形の面積を求めるには、底辺と高さが必要です。高さが直接分からないときは、三平方の定理で高さを求めてから面積を計算します。

例題 3

次の直角三角形で、斜辺が 13cm、直角をはさむ 1 辺が 5cm です。この三角形の面積を求めなさい。



方針

まず残りの 1 辺を三平方の定理で求め、そのあと面積を計算します。

解き方

残りの 1 辺を $x$cm とします。

$$x^2 + 5^2 = 13^2$$

$$x^2 + 25 = 169$$

$$x^2 = 144$$

よって、$x = 12$ です。

三角形の面積は、

$$5 \times 12 \div 2 = 30$$

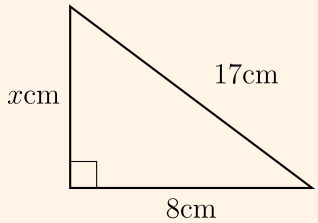
です。

答え

30cm^2

練習問題 3

斜辺が 17cm、直角をはさむ 1 辺が 8cm の直角三角形があります。この三角形の面積を求めなさい。



解答解説 3

解き方

残りの 1 辺を $x$cm とします。

$$x^2 + 8^2 = 17^2$$

$$x^2 + 64 = 289$$

$$x^2 = 225$$

よって、$x = 15$ です。

面積は、

$$8 \times 15 \div 2 = 60$$

です。

答え

60cm^2

3.2　対角線から正方形の面積を求める

対角線と面積

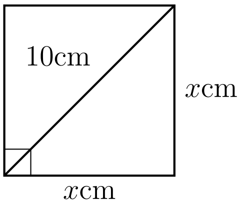
正方形の 1 辺を x、対角線を d とすると、

$$x^2 + x^2 = d^2$$

です。正方形の面積は x^2 なので、対角線から面積を求められます。

例題 4

対角線の長さが 10cm の正方形があります。この正方形の面積を求めなさい。



方針

1 辺を $x\text{cm}$ として、$x^2 + x^2 = 10^2$ を使います。

解き方

正方形の 1 辺を $x\text{cm}$ とします。

対角線でできる直角三角形より、

$$x^2 + x^2 = 10^2$$

です。

したがって、

$$2x^2 = 100$$

$$x^2 = 50$$

です。

正方形の面積は x^2 なので、

$$50$$

です。

答え

50cm^2

練習問題 4

対角線の長さが 12cm の正方形があります。この正方形の面積を求めなさい。

解答解説 4

解き方

正方形の 1 辺を $x\mathrm{cm}$ とします。

$$x^2 + x^2 = 12^2$$

$$2x^2 = 144$$

$$x^2 = 72$$

正方形の面積は x^2 なので、$72\mathrm{cm}^2$ です。

答え

$72\mathrm{cm}^2$

4　座標平面への応用

4.1　2 点間の距離

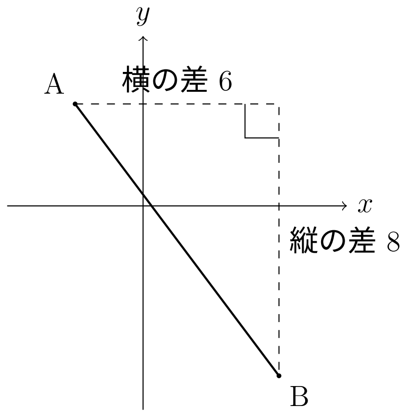
座標の距離

座標平面で 2 点の距離を求めるときは、横の差と縦の差を直角三角形の 2 辺として考えます。

$$\text{距離} = \sqrt{(\text{横の差})^2 + (\text{縦の差})^2}$$

例題 5

2 点 $A(-2, 3)$、$B(4, -5)$ の距離を求めなさい。



方針

横の差と縦の差を求め、三平方の定理を使います。

解き方

横の差は、

$$4 - (-2) = 6$$

です。

縦の差は、

$$3 - (-5) = 8$$

です。

2 点間の距離を d とすると、

$$d^2 = 6^2 + 8^2$$

$$d^2 = 36 + 64 = 100$$

より、

$$d = 10$$

です。

答え

10

練習問題 5

2 点 $P(-1, 4)$、$Q(7, -2)$ の距離を求めなさい。

解答解説 5

解き方

横の差は、

$$7 - (-1) = 8$$

です。

縦の差は、

$$4 - (-2) = 6$$

です。

距離を d とすると、

$$d^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$$

よって、$d = 10$ です。

答え

10

4.2　座標から直角三角形を判断する

座標と三平方の定理の逆

座標平面上の三角形では、まず 3 辺の長さを求めます。そのあと、いちばん長い辺の 2 乗が、残り 2 辺の 2 乗の和に等しいかを確認します。

例題 6

3 点 $A(1,2)$、$B(7,2)$、$C(7,10)$ を頂点とする三角形 ABC は直角三角形ですか。

方針

3 辺の長さを求め、三平方の定理の逆を確認します。

解き方

AB は横の差だけなので、

$$AB = 7 - 1 = 6$$

です。

BC は縦の差だけなので、

$$BC = 10 - 2 = 8$$

です。

AC は、横の差 6、縦の差 8 より、

$$AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100$$

したがって、

$$AC = 10$$

です。

$6^2 + 8^2 = 10^2$ が成り立つので、三角形 ABC は直角三角形です。

答え

直角三角形である。

練習問題 6

3 点 $P(0,1)$、$Q(5,1)$、$R(5,13)$ を頂点とする三角形 PQR は直角三角形ですか。

解答解説 6

解き方

$PQ=5$、$QR=12$ です。

PR は、横の差 5、縦の差 12 より、

$$PR^2=5^2+12^2=25+144=169$$

なので、$PR=13$ です。

$5^2+12^2=13^2$ が成り立ちます。

答え

直角三角形である。

5　円への応用

5.1　接線と半径

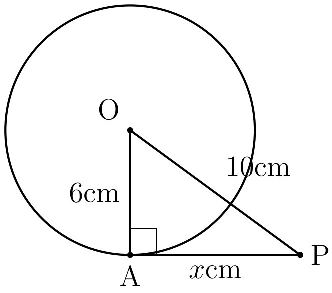
円の接線と直角

円の接線は、接点を通る半径と垂直になります。したがって、中心、接点、外部の点を結ぶと直角三角形ができます。

$$\text{半径} \perp \text{接線}$$

例題 7

円の中心を O、接点を A、外部の点を P とします。$OA = 6\text{cm}$、$OP = 10\text{cm}$ のとき、接線 AP の長さを求めなさい。



方針

半径と接線は垂直なので、三角形 OAP に三平方の定理を使います。

解き方

AP を $x\text{cm}$ とします。

三角形 OAP は、$\angle OAP = 90^\circ$ の直角三角形です。

斜辺は $OP = 10\text{cm}$ なので、

$$6^2 + x^2 = 10^2$$

です。

計算すると、

$$36 + x^2 = 100$$

$$x^2 = 64$$

より、

$$x = 8$$

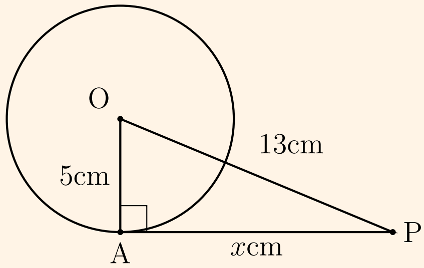
です。

答え

8cm

練習問題 7

円の中心を O、接点を A、外部の点を P とします。$OA = 5\text{cm}$、$OP = 13\text{cm}$ のとき、接線 AP の長さを求めなさい。



解答解説 7

解き方

AP を $x\text{cm}$ とします。

半径と接線は垂直なので、

$$5^2 + x^2 = 13^2$$

です。

計算すると、

$$25 + x^2 = 169$$

$$x^2 = 144$$

より、$x = 12$ です。

答え

12cm

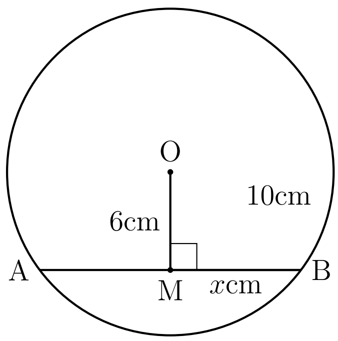
5.2 弦の長さを求める

中心から弦への垂線

円の中心から弦に垂線を下ろすと、その垂線は弦を 2 等分します。半径、中心から弦までの距離、弦の半分で直角三角形ができます。

例題 8

半径 10cm の円で、中心 O から弦 AB までの距離が 6cm です。弦 AB の長さを求めなさい。



方針

弦の半分を $x$cm として、三角形 OMB に三平方の定理を使います。

解き方

中心から弦に下ろした垂線は、弦を 2 等分します。

$MB = x$cm とすると、三角形 OMB で、

$$6^2 + x^2 = 10^2$$

です。

計算すると、

$$36 + x^2 = 100$$

$$x^2 = 64$$

より、

$$x = 8$$

です。

弦 AB はその 2 倍なので、

$$AB = 16$$

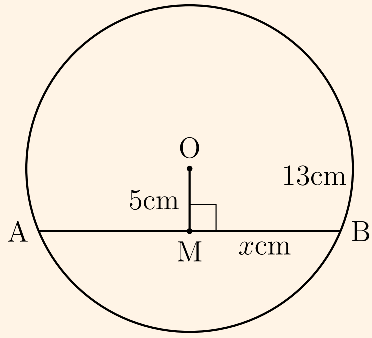
です。

答え

16cm

練習問題 8

半径 13cm の円で、中心から弦までの距離が 5cm です。弦の長さを求めなさい。



解答解説 8

解き方

弦の半分を $x$cm とします。

$$5^2 + x^2 = 13^2$$

$$25 + x^2 = 169$$

$$x^2 = 144$$

より、$x = 12$ です。

弦の長さはその 2 倍なので、

$$12 \times 2 = 24$$

です。

答え

24cm

6　立体への応用

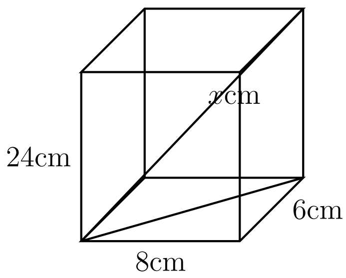
6.1　直方体の対角線

空間の対角線

直方体の対角線は、底面の対角線を先に求めてから、もう一度三平方の定理を使います。空間図形でも、直角三角形を 2 回作ると考えます。

例題 9

縦 6cm、横 8cm、高さ 24cm の直方体があります。この直方体の対角線の長さを求めなさい。



方針

まず底面の対角線を求め、次に空間の対角線を求めます。

解き方

底面の対角線を $d$cm とします。

$$d^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

より、

$$d = 10$$

です。

直方体の対角線を $x$cm とすると、底面の対角線 10cm と高さ 24cm で直角三角形ができます。

$$10^2 + 24^2 = x^2$$

$$100 + 576 = x^2$$

$$676 = x^2$$

したがって、

$$x = 26$$

です。

答え

26cm

練習問題 9

縦 3cm、横 4cm、高さ 12cm の直方体があります。この直方体の対角線の長さを求めなさい。

解答解説 9

解き方

底面の対角線を $d$cm とします。

$$d^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

より、$d = 5$ です。

直方体の対角線を $x$cm とすると、

$$5^2 + 12^2 = x^2$$

$$25 + 144 = x^2$$

$$169 = x^2$$

より、$x = 13$ です。

答え

13cm

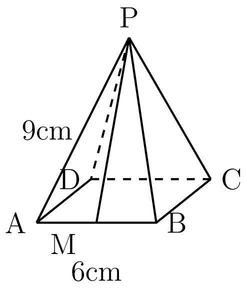
6.2　正四角錐に三平方の定理を用いる

正四角錐の考え方

正四角錐では、側面は合同な二等辺三角形になります。側面の高さや四角錐の高さを求めるときに、**辺の中点**や**底面の中心**を使って直角三角形を作ると、三平方の定理が使えます。

例題 10

底面が 1 辺 6cm の正方形、側辺が 9cm の正四角錐があります。この正四角錐の表面積を求めなさい。



方針

1 つの側面の高さを求めてから、4 枚の側面積と底面積を足します。

解き方

M を辺 AB の中点、側面の高さを $x$cm とすると、$AM = \frac{6}{2} = 3$ です。

側面 PAB は二等辺三角形なので、$PM \perp AB$ です。したがって、直角三角形 PAM で

$$3^2 + x^2 = 9^2$$

より、$x^2 = 72$、したがって $x = 6\sqrt{2}$ です。

1 つの側面の面積は

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 6\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$$

cm^2 なので、4 枚分の側面積は $72\sqrt{2}$cm^2 です。

また、底面積は $6 \times 6 = 36$cm^2 です。したがって、表面積は

$$36 + 72\sqrt{2}$$

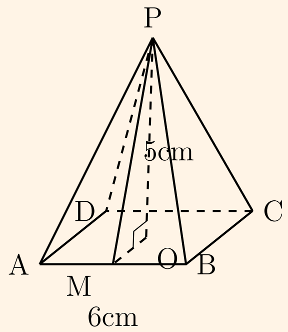
cm^2 です。

答え

$36 + 72\sqrt{2}$cm^2

練習問題 10

底面が 1 辺 6cm の正方形、側面の高さが 5cm の正四角錐があります。この正四角錐の体積を求めなさい。



解答解説 10

解き方

四角錐の高さを $x\text{cm}$ とします。

底面の中心を O、辺 AB の中点を M とすると、

$$OM = \frac{6}{2} = 3$$

です。

また、正四角錐では、頂点 P から底面の中心 O に下ろした垂線が高さなので、$PO = x\text{cm}$ です。側面の高さは $PM = 5\text{cm}$ なので、直角三角形 POM で、

$$x^2 + 3^2 = 5^2$$

$$x^2 + 9 = 25$$

$$x^2 = 16$$

より、

$$x = 4$$

です。

したがって、体積は、

$$\frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times 4 = 48$$

cm^3 です。

答え

48cm^3

7　入試大問につながる総合問題

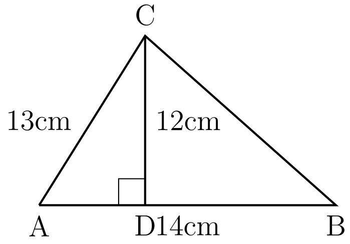
7.1　条件から線分を順番に求める

総合問題の考え方

入試大問では、求めたい長さがすぐには出ないことがあります。図の条件から、まず求められる長さを出し、その長さを次の式に使います。

例題 11

点 D は線分 AB 上にあり、$CD \perp AB$、$AC = 13\text{cm}$、$CD = 12\text{cm}$、$AB = 14\text{cm}$ です。DB の長さを求めなさい。



方針

まず三角形 ACD で AD を求め、$AB - AD$ で DB を求めます。

解き方

三角形 ACD で、AD を $x\text{cm}$ とします。

$$x^2 + 12^2 = 13^2$$

$$x^2 + 144 = 169$$

$$x^2 = 25$$

より、

$$x = 5$$

です。

したがって、

$$AD = 5$$

です。

$AB = 14\text{cm}$ なので、

$$DB = AB - AD = 14 - 5 = 9$$

です。

答え

9cm

練習問題 11

点 D は線分 AB 上にあり、$CD \perp AB$、$AC = 17\mathrm{cm}$、$CD = 15\mathrm{cm}$、$AB = 20\mathrm{cm}$ です。DB の長さを求めなさい。

解答解説 11

解き方

三角形 ACD で、AD を $x\mathrm{cm}$ とします。

$$x^2 + 15^2 = 17^2$$

$$x^2 + 225 = 289$$

$$x^2 = 64$$

より、$AD = 8$ です。

したがって、

$$DB = AB - AD = 20 - 8 = 12$$

です。

答え

12cm

7.2 複数の候補を比べる

候補を比べる問題

経路や長さの候補が複数ある問題では、それぞれの長さを三平方の定理で求め、最後に比べます。平方根の大小は、根号の中を比べると判断しやすいです。

例題 12

2 つの経路 A、B があります。経路 A の長さは、横 9cm、縦 12cm の長方形の対角線です。経路 B の長さは、横 8cm、縦 15cm の長方形の対角線です。短いのはどちらですか。

方針

それぞれの対角線の長さを三平方の定理で求めて比べます。

解き方

経路 A の長さを $a$cm とします。

$$a^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$$

より、

$$a = 15$$

です。

経路 B の長さを $b$cm とします。

$$b^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$$

より、

$$b = 17$$

です。

$15 < 17$ なので、短いのは経路 A です。

答え

経路 A

練習問題 12

経路 A の長さは、横 7cm、縦 24cm の長方形の対角線です。経路 B の長さは、横 10cm、縦 24cm の長方形の対角線です。短いのはどちらですか。

解答解説 12

解き方

経路 A の長さを $a$cm とします。

$$a^2 = 7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625$$

より、$a = 25$ です。

経路 B の長さを $b$cm とします。

$$b^2 = 10^2 + 24^2 = 100 + 576 = 676$$

より、$b = 26$ です。

$25 < 26$ なので、短いのは経路 A です。

答え

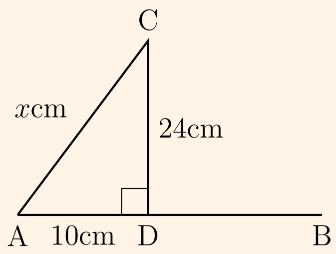
経路 A

8　単元まとめ練習問題

8.1　問題

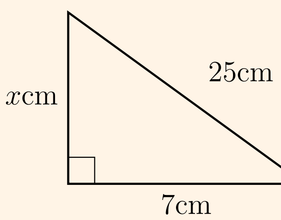
練習問題 まとめ 1

$AD = 10\text{cm}$、$CD = 24\text{cm}$、$CD \perp AB$ です。AC の長さを求めなさい。



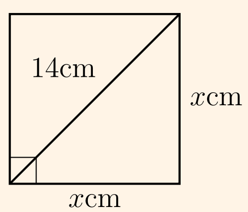
練習問題 まとめ 2

斜辺が 25cm、直角をはさむ 1 辺が 7cm の直角三角形があります。この三角形の面積を求めなさい。



練習問題 まとめ 3

対角線が 14cm の正方形があります。この正方形の面積を求めなさい。

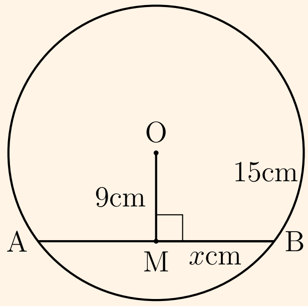


練習問題 まとめ 4

2 点 $A(-3, 2)$、$B(9, 7)$ の距離を求めなさい。

練習問題 まとめ 5

半径 15cm の円で、中心から弦までの距離が 9cm です。弦の長さを求めなさい。



練習問題 まとめ 6

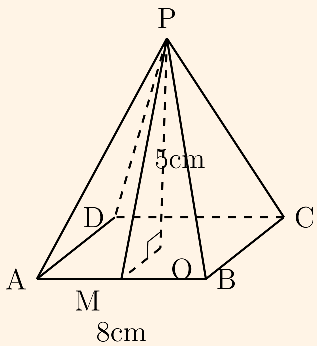
縦 5cm、横 12cm、高さ 84cm の直方体があります。この直方体の対角線の長さを求めなさい。

練習問題 まとめ 7

底面が 1 辺 8cm の正方形、側面の高さが 5cm の正四角錐があります。

(1) この正四角錐の表面積を求めなさい。

(2) この正四角錐の体積を求めなさい。



8.2 解答解説

解答解説 まとめ 1

解き方

三角形 ACD は直角三角形です。

AC を $x$cm とします。

$$10^2 + 24^2 = x^2$$

$$100 + 576 = x^2$$

$$676 = x^2$$

よって、$x = 26$ です。

答え

26cm

解答解説 まとめ 2

解き方

残りの 1 辺を $x$cm とします。

$$x^2 + 7^2 = 25^2$$

$$x^2 + 49 = 625$$

$$x^2 = 576$$

よって、$x = 24$ です。

面積は、

$$7 \times 24 \div 2 = 84$$

です。

答え

84cm^2

解答解説 まとめ 3

解き方

正方形の 1 辺を $x$cm とします。

$$x^2 + x^2 = 14^2$$

$$2x^2 = 196$$

$$x^2 = 98$$

正方形の面積は x^2 なので、98cm^2 です。

答え

98cm^2

解答解説 まとめ 4

解き方

横の差は、

$$9 - (-3) = 12$$

です。

縦の差は、

$$7 - 2 = 5$$

です。

距離を d とすると、

$$d^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$$

よって、$d = 13$ です。

答え

13

解答解説 まとめ 5

解き方

弦の半分を $x$cm とします。

$$9^2 + x^2 = 15^2$$

$$81 + x^2 = 225$$

$$x^2 = 144$$

より、$x = 12$ です。

弦の長さはその 2 倍なので、

$$12 \times 2 = 24$$

です。

答え

24cm

解答解説 まとめ 6

解き方

底面の対角線を $d$cm とします。

$$d^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$$

より、$d = 13$ です。

直方体の対角線を $x$cm とすると、

$$13^2 + 84^2 = x^2$$

$$169 + 7056 = x^2$$

$$7225 = x^2$$

よって、$x = 85$ です。

答え

85cm

解答解説 まとめ 7（1）

解き方

側面の高さが 5cm、底面の 1 辺が 8cm なので、1 つの側面の面積は、

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 5 = 20$$

cm^2 です。

側面は 4 枚あるので、側面積の合計は、

$$20 \times 4 = 80$$

cm^2 です。

また、底面積は、

$$8 \times 8 = 64$$

cm^2 です。

したがって、表面積は、

$$80 + 64 = 144$$

cm^2 です。

答え

$144\mathrm{cm}^2$

解答解説 まとめ 7（2）

解き方

四角錐の高さを $x\text{cm}$ とします。底面の中心を O、辺 AB の中点を M とすると、

$$OM = \frac{8}{2} = 4$$

です。

側面の高さは 5cm なので、直角三角形 POM で、

$$x^2 + 4^2 = 5^2$$

$$x^2 + 16 = 25$$

$$x^2 = 9$$

より、$x = 3$ です。

したがって、体積は、

$$\frac{1}{3} \times 8 \times 8 \times 3 = 64$$

cm^3 です。

答え

64cm^3

9 学習チェックリスト

できるようになったか確認しよう

- □図の中に隠れた直角三角形を見つけられる。
- □補助線や対角線から直角三角形を作れる。
- □三平方の定理を 2 回使って長さを求められる。
- □高さを求めてから面積を計算できる。
- □対角線から正方形の面積を求められる。
- □座標平面で 2 点間の距離を求められる。
- □円の接線や弦の問題に三平方の定理を使える。
- □直方体の対角線を段階的に求められる。
- □正四角錐の表面積や体積に三平方の定理を使える。
- □複数の候補の長さを比べられる。

10　まとめ

三平方の定理・応用編のまとめ

三平方の定理の応用問題では、公式そのものよりも、**どこに直角三角形を見つけるか**が大切です。

平面図形では、垂線や対角線を引いて直角三角形を作ります。座標平面では、横の差と縦の差を直角三角形の 2 辺として考えます。円では、半径と接線、中心から弦への垂線が直角を作ります。立体では、直方体の対角線や正四角錐の高さを、直角三角形に分けて考えます。

応用編では、次の流れを意識しましょう。

- 直角三角形を探す。
- 必要なら補助線や展開図を考える。
- 必要な長さを順番に求める。
- 最後に問題で聞かれている長さ・面積・経路を答える。