中学数学

相似

応用編

偏差値55以上を目指す入試応用対策

相似の証明・線分比・面積比・体積比を組み合わせ、
入試大問につながる図形問題に取り組みます。

KmKmの学習支援サイト

目次

1　この教材の使い方

この教材は、相似の基礎・標準を学んだあと、入試の大問に出るような図形問題へ進むための教材です。相似を証明するだけでなく、証明した相似を使って線分比・面積比・体積比を求める問題を扱います。

応用編で意識すること

- 図の中から、**相似な三角形**を見つける。
- 平行線・共通な角・対頂角から、**等しい角**を探す。
- 相似比を作るときは、**対応する辺の順番**を必ずそろえる。
- 面積比は相似比の 2 乗、体積比は相似比の 3 乗として使う。
- 証明して終わりではなく、証明した相似から長さや面積を求める。

注意 応用問題の進め方

応用問題では、いきなり比を作るのではなく、まず「どの三角形とどの三角形が相似か」を確認します。相似を示したあと、対応する辺をそろえて比を作ることが大切です。

2　相似の証明と長さの応用

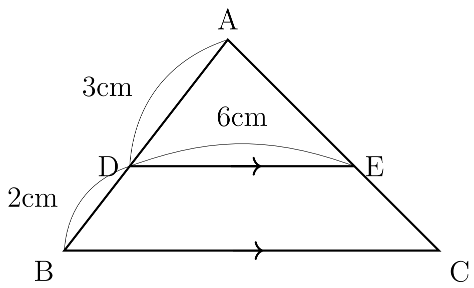
2.1　平行線から相似を見つける

平行線がある図形

平行線がある図では、同位角や錯角が等しくなります。そのため、2 組の角がそれぞれ等しいことを示して、三角形の相似を証明できます。

例題 1

次の図で、$DE \parallel BC$ です。$AD = 3\mathrm{cm}$、$DB = 2\mathrm{cm}$、$DE = 6\mathrm{cm}$ のとき、BC の長さを求めなさい。



方針

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ を使い、対応する辺 DE と BC を比べます。

解き方

$AB = AD + DB = 3 + 2 = 5$ です。

$DE \parallel BC$ より、

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

です。

したがって、

$$AD : AB = DE : BC$$

です。

数を入れると、

$$3 : 5 = 6 : BC$$

です。

よって、

$$BC = 6 \times \frac{5}{3} = 10$$

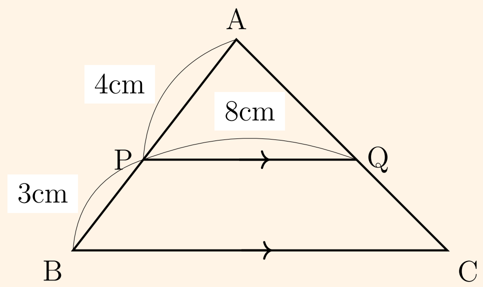
です。

答え

10cm

練習問題 1

次の図で、$PQ \parallel BC$ です。$AP = 4\text{cm}$、$PB = 3\text{cm}$、$PQ = 8\text{cm}$ のとき、BC の長さを求めなさい。



解答解説 1

解き方

$AB = AP + PB = 4 + 3 = 7$ です。

$PQ \parallel BC$ より、

$$\triangle APQ \sim \triangle ABC$$

です。

したがって、$AP : AB = PQ : BC$ です。

数を入れると、

$$4 : 7 = 8 : BC$$

です。

よって、

$$BC = 8 \times \frac{7}{4} = 14$$

です。

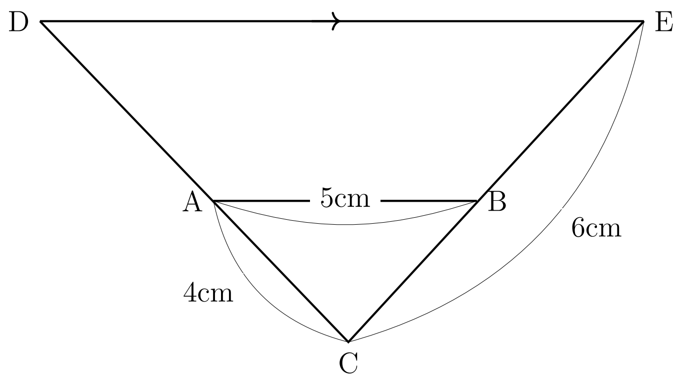
答え

14cm

2.2 相似を証明してから長さを求める

例題 2

次の図で、$AB \parallel DE$ です。$AC = 4\mathrm{cm}$、$CE = 6\mathrm{cm}$、$AB = 5\mathrm{cm}$ のとき、DE の長さを求めなさい。



方針

$AB \parallel DE$ から、$\triangle CAB$ と $\triangle CDE$ が相似であることを使います。

解き方

$AB \parallel DE$ より、同位角が等しいので、

$$\angle CAB = \angle CDE$$

です。

また、

$$\angle CBA = \angle CED$$

です。

したがって、

$$\triangle CAB \sim \triangle CDE$$

です。

$CA : CD = AB : DE$ を使います。

ここで、CD は CA と AD を合わせた長さではなく、図の左側全体です。今回は右側の対応する辺から、$CE = 6\mathrm{cm}$ に対応する辺を使うと、相似比は

$$CA : CE = 4 : 6 = 2 : 3$$

です。

よって、

$$AB : DE = 2 : 3$$

なので、

$$5 : DE = 2 : 3$$

です。

したがって、

$$DE = 5 \times \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$$

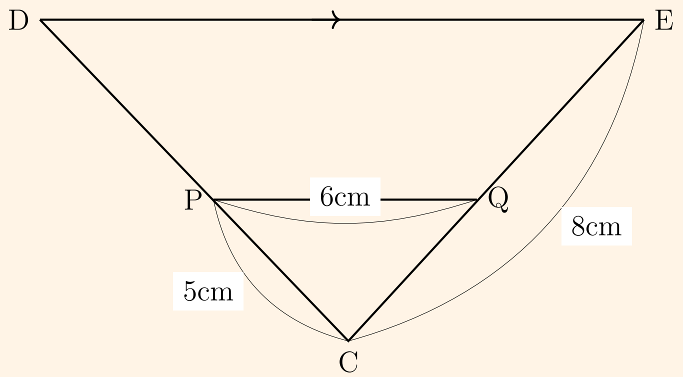
です。

答え

$$\frac{15}{2}\text{cm}$$

練習問題 2

次の図で、$PQ \parallel DE$ です。$CP = 5\text{cm}$、$CE = 8\text{cm}$、$PQ = 6\text{cm}$ のとき、DE の長さを求めなさい。



解答解説 2

解き方

$PQ \parallel DE$ より、

$$\triangle CPQ \sim \triangle CDE$$

です。

相似比は、

$$CP : CE = 5 : 8$$

です。

したがって、

$$PQ : DE = 5 : 8$$

です。

数を入れると、

$$6 : DE = 5 : 8$$

です。

よって、

$$DE = 6 \times \frac{8}{5} = \frac{48}{5}$$

です。

答え

$$\frac{48}{5}\text{cm}$$

3　平行線と線分比の応用

3.1　平行線にはさまれた線分比

平行線にはさまれた線分比

何本かの平行線が 2 本の直線を切るとき、対応する線分の比は等しくなります。

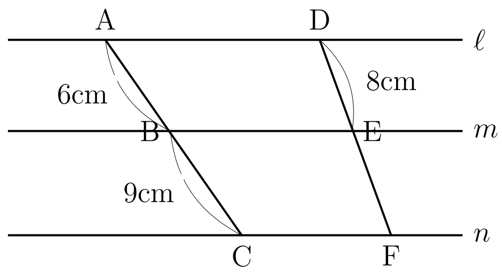
たとえば、

$$AB : BC = DE : EF$$

のように、同じ位置にある線分どうしを比べます。

例題 3

次の図で、$\ell \parallel m \parallel n$ です。$AB = 6\text{cm}$、$BC = 9\text{cm}$、$DE = 8\text{cm}$ のとき、EF の長さを求めなさい。



方針

対応する線分の比が等しいので、$AB : BC = DE : EF$ を使います。

解き方

$\ell \parallel m \parallel n$ なので、

$$AB : BC = DE : EF$$

です。

数を入れると、

$$6 : 9 = 8 : EF$$

です。

$6:9=2:3$ なので、

$$8:EF=2:3$$

です。

よって、

$$EF=8\times\frac{3}{2}=12$$

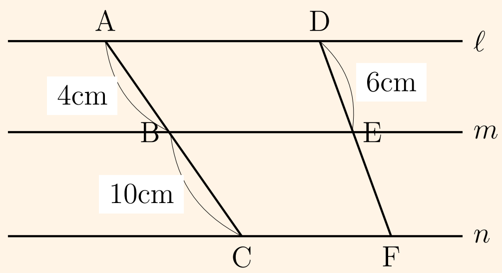
です。

答え

$$12\text{cm}$$

練習問題 3

次の図で、$\ell \parallel m \parallel n$ です。$AB=4\text{cm}$、$BC=10\text{cm}$、$DE=6\text{cm}$ のとき、EF の長さを求めなさい。



解答解説 3

解き方

$\ell \parallel m \parallel n$ なので、

$$AB : BC = DE : EF$$

です。

数を入れると、

$$4 : 10 = 6 : EF$$

です。

$4 : 10 = 2 : 5$ なので、

$$6 : EF = 2 : 5$$

です。

よって、

$$EF = 6 \times \frac{5}{2} = 15$$

です。

答え

15cm

4　面積比の応用

4.1　相似比の 2 乗を使う

相似比と面積比

相似比が

$$2 : 5$$

なら、面積比は

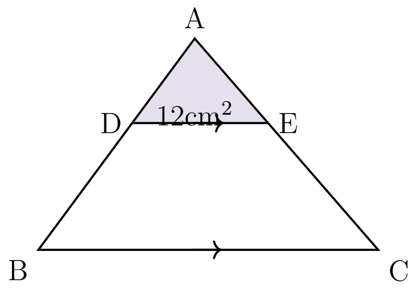
$$2^2 : 5^2 = 4 : 25$$

です。

長さの比をそのまま面積比にしないように注意しましょう。

例題 4

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ で、相似比が $2 : 5$ です。$\triangle ADE$ の面積が 12cm^2 のとき、$\triangle ABC$ の面積を求めなさい。



方針

相似比 $2 : 5$ から、面積比を $4 : 25$ にします。

解き方

相似比が $2 : 5$ なので、面積比は、

$$2^2 : 5^2 = 4 : 25$$

です。

$\triangle ADE$ の面積が 12cm^2 で、これが面積比の 4 にあたります。

したがって、面積比の 1 にあたる面積は、

$$12 \div 4 = 3$$

です。

よって、$\triangle ABC$ の面積は、

$$3 \times 25 = 75$$

です。

答え

$$75\mathrm{cm}^2$$

練習問題 4

相似な 2 つの三角形があります。相似比が $3:4$ で、小さい三角形の面積が $45\mathrm{cm}^2$ です。大きい三角形の面積を求めなさい。

解答解説 4

解き方

相似比が $3:4$ なので、面積比は、

$$3^2 : 4^2 = 9 : 16$$

です。

小さい三角形の面積 $45\mathrm{cm}^2$ が、面積比の 9 にあたります。

したがって、面積比の 1 にあたる面積は、

$$45 \div 9 = 5$$

です。

よって、大きい三角形の面積は、

$$5 \times 16 = 80$$

です。

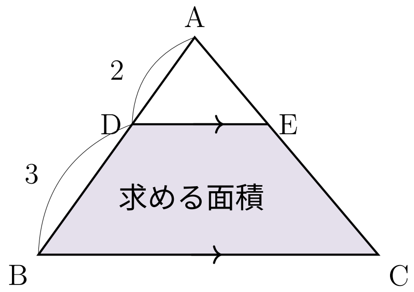
答え

$$80\mathrm{cm}^2$$

4.2 残りの面積を求める

例題 5

次の図で、$DE \parallel BC$ です。$AD : DB = 2 : 3$、$\triangle ADE$ の面積が 16cm^2 のとき、四角形 $DBCE$ の面積を求めなさい。



方針

$AD : AB$ を求めて、$\triangle ADE$ と $\triangle ABC$ の面積比を使います。

解き方

$AD : DB = 2 : 3$ なので、

$$AD : AB = 2 : (2 + 3) = 2 : 5$$

です。

$DE \parallel BC$ より、

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

です。

したがって、面積比は、

$$2^2 : 5^2 = 4 : 25$$

です。

$\triangle ADE$ の面積 16cm^2 が、面積比の 4 にあたるので、比の 1 にあたる面積は、

$$16 \div 4 = 4$$

です。

$\triangle ABC$ の面積は、

$$4 \times 25 = 100$$

です。

求める四角形 $DBCE$ の面積は、

$$100 - 16 = 84$$

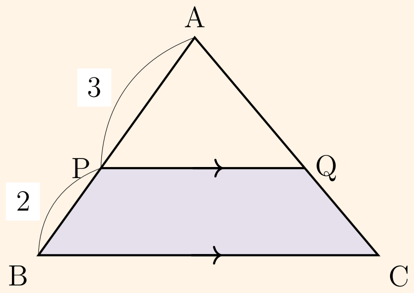
です。

答え

$$84\text{cm}^2$$

練習問題 5

次の図で、$PQ \parallel BC$ です。$AP : PB = 3 : 2$、$\triangle APQ$ の面積が 27cm^2 のとき、四角形 $PBCQ$ の面積を求めなさい。



解答解説 5

解き方

$AP : PB = 3 : 2$ なので、

$$AP : AB = 3 : (3+2) = 3 : 5$$

です。

$PQ \parallel BC$ より、$\triangle APQ \sim \triangle ABC$ です。

面積比は、

$$3^2 : 5^2 = 9 : 25$$

です。

$\triangle APQ$ の面積 $27\mathrm{cm}^2$ が、面積比の 9 にあたるので、比の 1 にあたる面積は、

$$27 \div 9 = 3$$

です。

$\triangle ABC$ の面積は、

$$3 \times 25 = 75$$

です。

求める四角形 $PBCQ$ の面積は、

$$75 - 27 = 48$$

です。

答え

$$48\mathrm{cm}^2$$

5 体積比の応用

5.1 相似比の 3 乗を使う

相似比と体積比

相似な立体では、相似比が

$$2 : 3$$

なら、体積比は

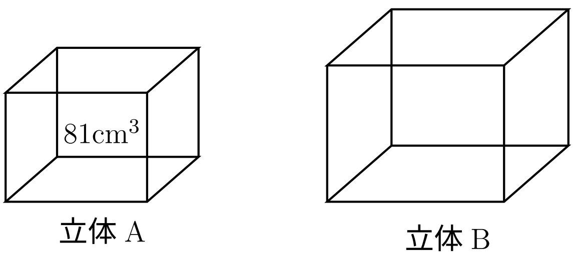
$$2^3 : 3^3 = 8 : 27$$

です。

面積比と同じように考えてしまうミスが多いので、立体では **3 乗**にすることを意識しましょう。

例題 6

相似な 2 つの立体 A、B があります。相似比が $3 : 5$ で、立体 A の体積が 81cm^3 です。立体 B の体積を求めなさい。



方針

相似比 $3 : 5$ から体積比を $27 : 125$ にします。

解き方

相似比が $3 : 5$ なので、体積比は、

$$3^3 : 5^3 = 27 : 125$$

です。

立体 A の体積 81cm^3 が、体積比の 27 にあたります。

比の 1 にあたる体積は、

$$81 \div 27 = 3$$

です。

したがって、立体 B の体積は、

$$3 \times 125 = 375$$

です。

答え

$$375\mathrm{cm}^3$$

練習問題 6

相似な 2 つの立体 P、Q があります。相似比が $2:3$ で、立体 P の体積が $40\mathrm{cm}^3$ です。立体 Q の体積を求めなさい。

解答解説 6

解き方

相似比が $2:3$ なので、体積比は、

$$2^3 : 3^3 = 8 : 27$$

です。

立体 P の体積 $40\mathrm{cm}^3$ が、体積比の 8 にあたります。

比の 1 にあたる体積は、

$$40 \div 8 = 5$$

です。

したがって、立体 Q の体積は、

$$5 \times 27 = 135$$

です。

答え

$$135\mathrm{cm}^3$$

6 角の二等分線と相似の利用

6.1 線分比を作る応用問題

角の二等分線と線分比

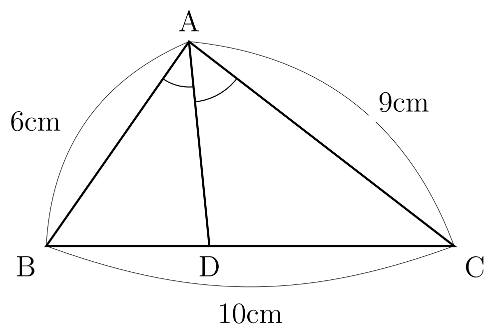
三角形で、角の二等分線が向かい合う辺を分けるとき、分けられた 2 つの線分の比は、両側の辺の長さの比と等しくなります。

$$AB : AC = BD : DC$$

この関係は、相似を使って説明できる入試頻出の考え方です。

例題 7

$\triangle ABC$ で、AD が $\angle A$ の二等分線です。$AB = 6\text{cm}$、$AC = 9\text{cm}$、$BC = 10\text{cm}$ のとき、BD と DC の長さを求めなさい。



方針

角の二等分線の関係から、$BD : DC = AB : AC$ を使います。

解き方

AD は $\angle A$ の二等分線なので、

$$BD : DC = AB : AC$$

です。

したがって、

$$BD : DC = 6 : 9 = 2 : 3$$

です。

また、

$$BD + DC = BC = 10$$

です。

$BD : DC = 2 : 3$ なので、全体を $2 + 3 = 5$ 等分して考えます。

1 等分は、

$$10 \div 5 = 2$$

cm です。

よって、

$$BD = 2 \times 2 = 4, \quad DC = 2 \times 3 = 6$$

です。

答え

$$BD = 4\text{cm}, \quad DC = 6\text{cm}$$

練習問題 7

$\triangle PQR$ で、PX が $\angle P$ の二等分線です。$PQ = 8\text{cm}$、$PR = 12\text{cm}$、$QR = 15\text{cm}$ のとき、QX と XR の長さを求めなさい。

解答解説 7

解き方

PX は $\angle P$ の二等分線なので、

$$QX : XR = PQ : PR$$

です。

したがって、

$$QX : XR = 8 : 12 = 2 : 3$$

です。

また、

$$QX + XR = QR = 15$$

です。

$2 + 3 = 5$ なので、1 等分は、

$$15 \div 5 = 3$$

cm です。

よって、

$$QX = 3 \times 2 = 6, \quad XR = 3 \times 3 = 9$$

です。

答え

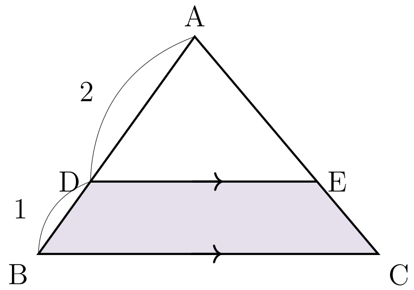
$$QX = 6\text{cm}, \quad XR = 9\text{cm}$$

7 入試大問につながる総合問題

7.1 相似・面積比・線分比を組み合わせる

例題 8

次の図で、$DE \parallel BC$、$AD : DB = 2 : 1$ です。$\triangle ABC$ の面積が 54cm^2 のとき、四角形 $DBCE$ の面積を求めなさい。



方針

$AD : AB$ を出し、面積比を使って小さい三角形の面積を求めます。

解き方

$AD : DB = 2 : 1$ なので、

$$AD : AB = 2 : (2 + 1) = 2 : 3$$

です。

$DE \parallel BC$ より、

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

です。

面積比は、

$$2^2 : 3^2 = 4 : 9$$

です。

$\triangle ABC$ の面積 54cm^2 が、面積比の 9 にあたります。

したがって、$\triangle ADE$ の面積は、

$$54 \times \frac{4}{9} = 24$$

です。

よって、四角形 $DBCE$ の面積は、

$$54 - 24 = 30$$

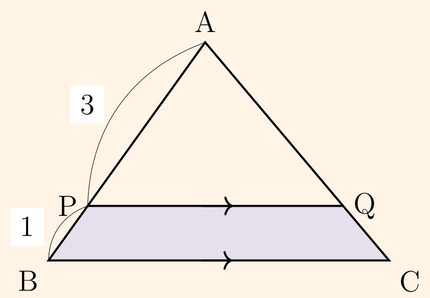
です。

答え

$$30\text{cm}^2$$

練習問題 8

次の図で、$PQ \parallel BC$、$AP : PB = 3 : 1$ です。$\triangle ABC$ の面積が 80cm^2 のとき、四角形 $PBCQ$ の面積を求めなさい。



解答解説 8

解き方

$AP : PB = 3 : 1$ なので、

$$AP : AB = 3 : (3 + 1) = 3 : 4$$

です。

$PQ \parallel BC$ より、$\triangle APQ \sim \triangle ABC$ です。

面積比は、

$$3^2 : 4^2 = 9 : 16$$

です。

$\triangle ABC$ の面積 80cm^2 が、面積比の 16 にあたります。

したがって、$\triangle APQ$ の面積は、

$$80 \times \frac{9}{16} = 45$$

です。

求める四角形 $PBCQ$ の面積は、

$$80 - 45 = 35$$

です。

答え

$$35\text{cm}^2$$

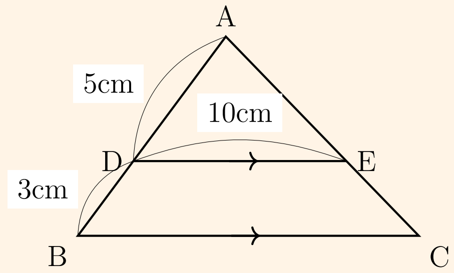
8　単元まとめ練習問題

練習問題 まとめ 1

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ で、相似比が $4:7$ です。$AB = 12\text{cm}$ のとき、対応する辺 DE の長さを求めなさい。

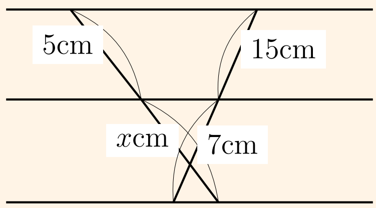
練習問題 まとめ 2

次の図で、$DE \parallel BC$ です。$AD = 5\text{cm}$、$DB = 3\text{cm}$、$DE = 10\text{cm}$ のとき、BC の長さを求めなさい。



練習問題 まとめ 3

3 本の平行線が 2 本の直線を切っています。片方の直線上で上から 5cm、7cm に分けられ、もう片方の直線上で上の部分が 15cm です。下の部分の長さを求めなさい。



練習問題 まとめ 4

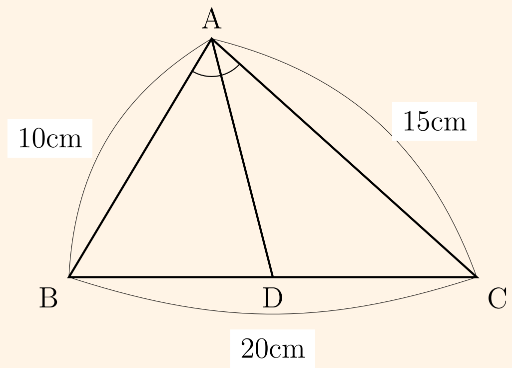
相似な 2 つの図形の相似比が $5:6$ です。小さい図形の面積が 75cm^2 のとき、大きい図形の面積を求めなさい。

練習問題 まとめ 5

相似な 2 つの立体の相似比が 4 ： 5 です。小さい立体の体積が 128cm^3 のとき、大きい立体の体積を求めなさい。

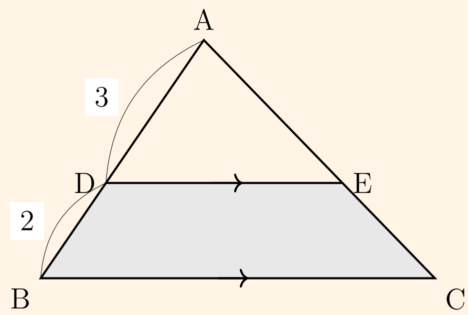
練習問題 まとめ 6

$\triangle ABC$ で、AD が $\angle A$ の二等分線です。$AB = 10\text{cm}$、$AC = 15\text{cm}$、$BC = 20\text{cm}$ のとき、BD と DC の長さを求めなさい。



練習問題 まとめ 7

$DE \parallel BC$、$AD : DB = 3 : 2$ です。$\triangle ABC$ の面積が 100cm^2 のとき、四角形 $DBCE$ の面積を求めなさい。



8.1 解答解説

解答解説 まとめ 1

解き方

相似比が $4:7$ なので、

$$AB : DE = 4 : 7$$

です。

$AB = 12\text{cm}$ より、

$$12 : DE = 4 : 7$$

です。

よって、

$$DE = 12 \times \frac{7}{4} = 21$$

です。

答え

$$21\text{cm}$$

解答解説 まとめ 2

解き方

$AB = AD + DB = 5 + 3 = 8$ です。

$DE \parallel BC$ より、$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ です。

したがって、

$$AD : AB = DE : BC$$

です。

数を入れると、

$$5 : 8 = 10 : BC$$

です。

よって、

$$BC = 10 \times \frac{8}{5} = 16$$

です。

答え

16cm

解答解説 まとめ 3

解き方

平行線にはさまれた線分の比は等しいので、

$$5 : 7 = 15 : x$$

とおきます。

5 が 15 になっているので、3 倍です。

したがって、

$$x = 7 \times 3 = 21$$

です。

答え

21cm

解答解説 まとめ 4

解き方

相似比が $5:6$ なので、面積比は、

$$5^2 : 6^2 = 25 : 36$$

です。

小さい図形の面積 75cm^2 が、面積比の 25 にあたります。

比の 1 にあたる面積は、

$$75 \div 25 = 3$$

です。

したがって、大きい図形の面積は、

$$3 \times 36 = 108$$

です。

答え

$$108\text{cm}^2$$

解答解説 まとめ 5

解き方

相似比が $4:5$ なので、体積比は、

$$4^3 : 5^3 = 64 : 125$$

です。

小さい立体の体積 128cm^3 が、体積比の 64 にあたります。

比の 1 にあたる体積は、

$$128 \div 64 = 2$$

です。

したがって、大きい立体の体積は、

$$2 \times 125 = 250$$

です。

答え

$$250\text{cm}^3$$

解答解説 まとめ 6

解き方

角の二等分線の関係より、

$$BD : DC = AB : AC = 10 : 15 = 2 : 3$$

です。

また、$BD + DC = BC = 20$ です。

$2 + 3 = 5$ なので、1 等分は、

$$20 \div 5 = 4$$

cm です。

よって、

$$BD = 4 \times 2 = 8, \quad DC = 4 \times 3 = 12$$

です。

答え

$$BD = 8\text{cm}, \quad DC = 12\text{cm}$$

解答解説 まとめ 7

解き方

$AD : DB = 3 : 2$ なので、

$$AD : AB = 3 : (3+2) = 3 : 5$$

です。

$DE \parallel BC$ より、$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ です。

面積比は、

$$3^2 : 5^2 = 9 : 25$$

です。

$\triangle ABC$ の面積 100cm^2 が、面積比の 25 にあたります。

したがって、$\triangle ADE$ の面積は、

$$100 \times \frac{9}{25} = 36$$

です。

求める四角形 $DBCE$ の面積は、

$$100 - 36 = 64$$

です。

答え

$$64\text{cm}^2$$

9　学習チェックリスト

できるようになったことを確認しよう

- □平行線から相似な三角形を見つけられる。
- □相似を証明してから、対応する辺の長さを求められる。
- □平行線にはさまれた線分比を使える。
- □面積比が相似比の 2 乗になることを使える。
- □体積比が相似比の 3 乗になることを使える。
- □角の二等分線による線分比を使える。
- □相似比と面積比を組み合わせた入試型問題を解ける。

10　まとめ

相似・応用編のポイント

1. 相似を使う前に、まずどの三角形どうしが相似かを確認する。
2. 平行線がある図では、錯角・同位角から等しい角を探す。
3. 相似比は、対応する辺の順番をそろえて作る。
4. 面積比は相似比の 2 乗、体積比は相似比の 3 乗になる。
5. 入試応用問題では、相似の証明と比の計算を組み合わせる。