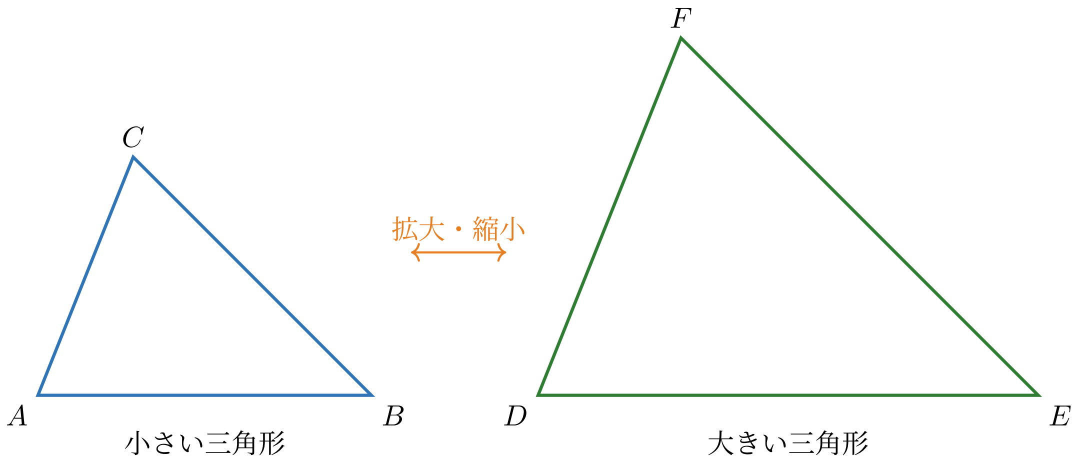
中学数学 相似の解き方

相似条件・相似比・面積比・線分比をわかりやすく整理

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$



対応する辺の比が等しく、対応する角の大きさが等しい

この教材の対象

偏差値 40〜50 程度の中学生が、偏差値 50 以上を目指すための復習教材です。学校の授業、定期テスト、高校入試の基礎固めに使えます。

この教材で大切にすること

相似は、図形を「同じ形で大きさが違うもの」と見る単元です。公式を覚えるだけでなく、対応する辺と角をそろえることを大切にしましょう。

この教材の使い方

学習の進め方

(1) まずは、相似とは何かを理解する。

(2) 次に、三角形の相似条件を使えるようにする。

(3) 相似比、面積比、体積比を区別して整理する。

(4) 高校入試では、線分比、平行線、面積比を組み合わせて考える。

目次

1　相似の基本

1.1　相似とは何か

相似の意味

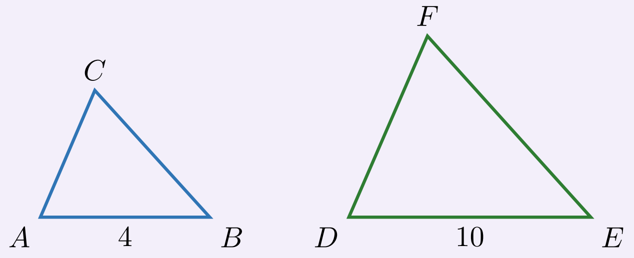
2 つの図形で、一方を拡大または縮小すると、もう一方にぴったり重なるとき、2 つの図形は相似であるといいます。

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

この記号は「三角形 ABC と三角形 DEF は相似である」と読みます。

例題 1　相似な図形の対応を読む

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ で、A と D、B と E、C と F が対応しています。$AB = 4\,\mathrm{cm}$、$DE = 10\,\mathrm{cm}$ のとき、相似比を求めなさい。



解説

対応する辺は AB と DE です。したがって、相似比は

$$AB : DE = 4 : 10 = 2 : 5$$

答え： $2 : 5$

確認ポイント： 相似比は、どちらの図形からどちらの図形へ見るかをそろえる。

1.2　対応する辺と角

対応をそろえる

相似では、次の 2 つが大切です。

- 対応する角の大きさは等しい。
- 対応する辺の比は等しい。

たとえば、$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ の順に書いてあるとき、対応は

$$A \leftrightarrow D, \quad B \leftrightarrow E, \quad C \leftrightarrow F$$

です。辺は、$AB \leftrightarrow DE$、$BC \leftrightarrow EF$、$CA \leftrightarrow FD$ と対応します。

相似記号の順番に注意

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ と書くとき、文字の順番には意味があります。対応する点の順に並べないと、辺の比を間違えやすくなります。

2　三角形の相似条件

2.1　3 つの相似条件

三角形の相似条件

三角形が相似であることを示すには、次の 3 つのどれかを使います。

(1) 3 組の辺の比がすべて等しい。

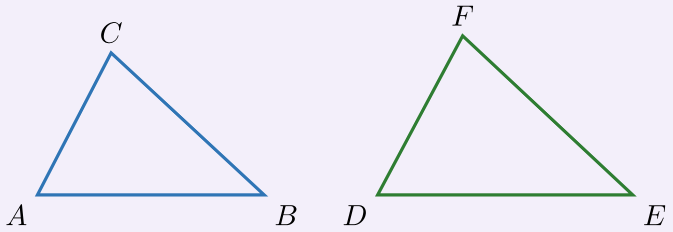
(2) 2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい。

(3) 2 組の角がそれぞれ等しい。

高校入試では、特に 2 組の角がそれぞれ等しいを使う証明がよく出ます。

例題 2　2 組の角で相似を示す

図で、$\angle A = \angle D$、$\angle B = \angle E$ である。$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ が相似であることを説明しなさい。



解説

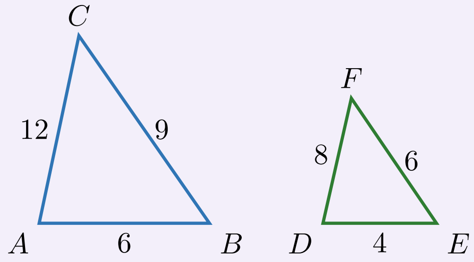
$\angle A = \angle D$、$\angle B = \angle E$ なので、2 組の角がそれぞれ等しいです。したがって、三角形の相似条件より、

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

答え： 2 組の角がそれぞれ等しいので、$\triangle ABC \sim \triangle DEF$。

例題 3　辺の比で相似を示す

$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ で、$AB = 6$、$BC = 9$、$CA = 12$、$DE = 4$、$EF = 6$、$FD = 8$ である。2 つの三角形は相似か。



解説

対応する辺の比を調べます。

$$AB : DE = 6 : 4 = 3 : 2$$

$$BC : EF = 9 : 6 = 3 : 2$$

$$CA : FD = 12 : 8 = 3 : 2$$

3 組の辺の比がすべて等しいので、2 つの三角形は相似です。

答え： 相似である。

確認ポイント： 比を比べるときは、対応する辺どうしを比べる。

2.2 証明問題の書き方

相似の証明の型

相似の証明は、次の型で書くと整理しやすくなります。

(1) どの三角形とどの三角形を比べるかを書く。

(2) 等しい角や辺の比を書く。

(3) 使う相似条件を書く。

(4) だから相似である、と結論を書く。

証明でよくあるミス

「角が等しい」とだけ書いても、どの角なのか分かりません。$\angle A = \angle D$ のように記号で書くことを意識しましょう。

3 相似比と辺の長さ

3.1 相似比の使い方

辺の長さを求める基本

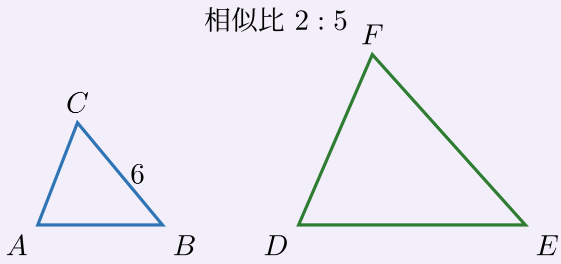
相似な図形では、対応する辺の比が等しくなります。

$$AB : DE = BC : EF = CA : FD$$

分からない長さを x とおいて、比例式を作ると求めやすいです。

例題 4 相似比から辺の長さを求める

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ で、相似比が $2:5$ である。$BC = 6\,\mathrm{cm}$ のとき、対応する辺 EF の長さを求めなさい。



解説

相似比が $2:5$ なので、$BC : EF = 2 : 5$ です。

$$6 : EF = 2 : 5$$

$EF = x$ とすると、

$$6 : x = 2 : 5$$

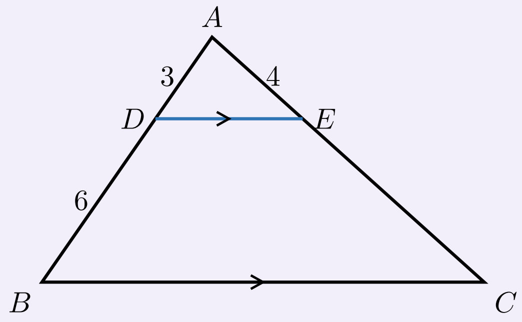
$$2x = 30$$

$$x = 15$$

答え： $15\,\mathrm{cm}$

例題 5　図から相似比を使う

図で、$DE /\!/ BC$ である。$AD = 3\,\mathrm{cm}$、$DB = 6\,\mathrm{cm}$、$AE = 4\,\mathrm{cm}$ のとき、EC の長さを求めなさい。



解説

$DE /\!/ BC$ なので、$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ です。

$$AB = AD + DB = 3 + 6 = 9$$

相似比は

$$AD : AB = 3 : 9 = 1 : 3$$

したがって、

$$AE : AC = 1 : 3$$

$AE = 4$ なので、$AC = 12$ です。よって、

$$EC = AC - AE = 12 - 4 = 8$$

答え： $8\,\mathrm{cm}$

3.2 比例式の作り方

比例式は対応をそろえる

$AB : DE = BC : EF$ のように、左側の図形どうし、右側の図形どうしをそろえます。途中で順番を入れ替えると、答えが逆になることがあります。

4　平行線と線分比

4.1　平行線がある図形

平行線が見えたら相似を探す

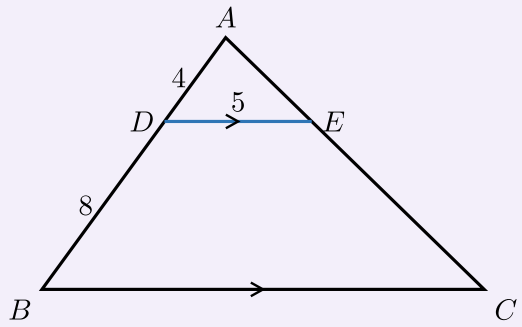
三角形の中に平行線があると、同位角や錯角が等しくなるため、相似な三角形が見つかりやすくなります。

$$DE \parallel BC \quad \Rightarrow \quad \triangle ADE \sim \triangle ABC$$

高校入試では、平行線を見つけて線分比を求める問題がよく出ます。

例題 6　平行線と線分比

図で、$DE \parallel BC$ である。$AD = 4\,\mathrm{cm}$、$DB = 8\,\mathrm{cm}$、$DE = 5\,\mathrm{cm}$ のとき、BC の長さを求めなさい。



解説

$AB = AD + DB = 4 + 8 = 12$ です。$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ なので、

$$AD : AB = DE : BC$$

$$4 : 12 = 5 : BC$$

$$1 : 3 = 5 : BC$$

したがって、$BC = 15$ です。

答え： $15\,\mathrm{cm}$

4.2　中点連結定理

中点連結定理

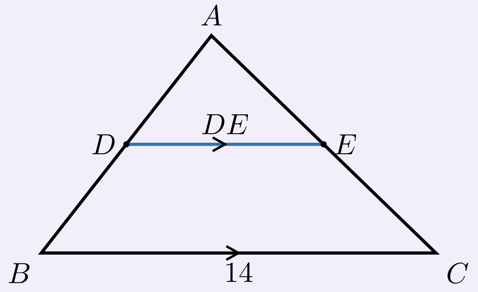
三角形で、2 辺の中点を結ぶ線分は、残りの 1 辺に平行で、その長さは半分になります。

$$DE \parallel BC, \qquad DE = \frac{1}{2}BC$$

中点が出てきたら、平行と半分を思い出しましょう。

例題 7　中点連結定理

$\triangle ABC$ で、D は AB の中点、E は AC の中点である。$BC = 14\,\mathrm{cm}$ のとき、DE の長さを求めなさい。



解説

D、E はそれぞれ 2 辺の中点なので、中点連結定理より、

$$DE = \frac{1}{2}BC$$

$$DE = \frac{1}{2} \times 14 = 7$$

答え：$7\,\mathrm{cm}$

5 面積比・体積比

5.1 相似比と面積比

面積比は相似比の 2 乗

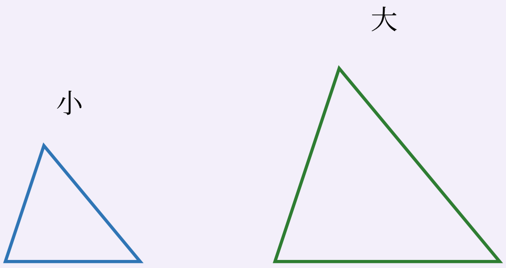
相似比が $a : b$ のとき、面積比は

$$a^2 : b^2$$

になります。面積は長さの 2 乗で変わると考えましょう。

例題 8 相似比から面積比を求める

2 つの相似な三角形の相似比が 3 : 5 である。このとき、面積比を求めなさい。



相似比 3 : 5

解説

面積比は相似比の 2 乗です。

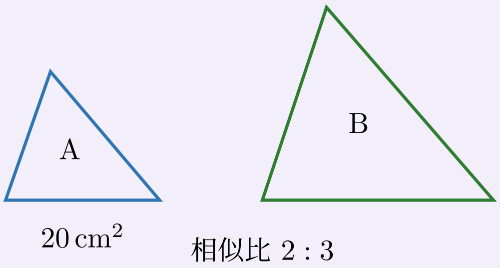
$$3^2 : 5^2 = 9 : 25$$

答え： 9 : 25

確認ポイント： 長さの比をそのまま面積比にしない。

例題 9　面積を求める

相似な 2 つの図形 A、B があり、相似比は $2:3$ である。図形 A の面積が $20\,\mathrm{cm}^2$ のとき、図形 B の面積を求めなさい。



解説

相似比が $2:3$ なので、面積比は
$$2^2 : 3^2 = 4 : 9$$

図形 A の面積 $20\,\mathrm{cm}^2$ が 4 にあたります。図形 B の面積を $x\,\mathrm{cm}^2$ とすると、

$$20 : x = 4 : 9$$
$$4x = 180$$
$$x = 45$$

答え： $45\,\mathrm{cm}^2$

5.2 相似比と体積比

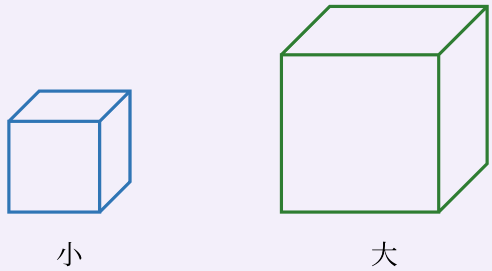
体積比は相似比の 3 乗

相似比が $a:b$ のとき、体積比は
$$a^3 : b^3$$

になります。立体では、長さ・幅・高さの 3 方向が変わるためです。

例題 10　体積比を求める

相似な 2 つの立体の相似比が $1:4$ である。このとき、体積比を求めなさい。



相似比 $1:4$

解説

体積比は相似比の 3 乗です。

$$1^3 : 4^3 = 1 : 64$$

答え：$1:64$

相似比・面積比・体積比の区別

相似比が $2:3$ のとき、面積比は $4:9$、体積比は $8:27$ です。何の比を聞かれているかを必ず確認しましょう。

6 相似を使った高校入試で役立つ見方

6.1 図に印をつける

入試問題での見方

相似の問題では、図を見てすぐ計算するのではなく、次の順に整理します。

(1) 平行線、等しい角、共通の角に印をつける。

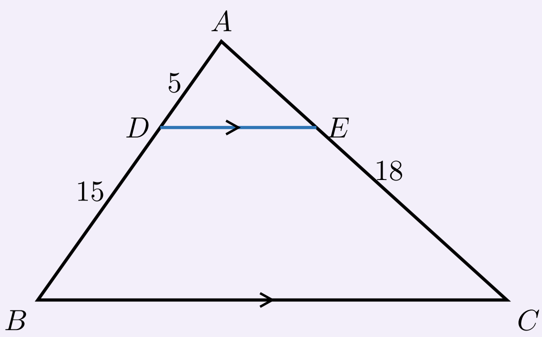
(2) 相似になりそうな三角形を探す。

(3) 対応する順番で三角形を書く。

(4) 相似比を使って、必要な長さや面積を求める。

例題 11　共通の角と平行線で相似を見つける

図で、$DE \mathbin{/\!/} BC$ である。$AD = 5$、$AB = 15$、$AC = 18$ のとき、AE を求めなさい。



解説

$DE \mathbin{/\!/} BC$ なので、$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ です。

$$AD : AB = AE : AC$$

$$5 : 15 = AE : 18$$

$$1 : 3 = AE : 18$$

よって、$AE = 6$ です。

答え：6

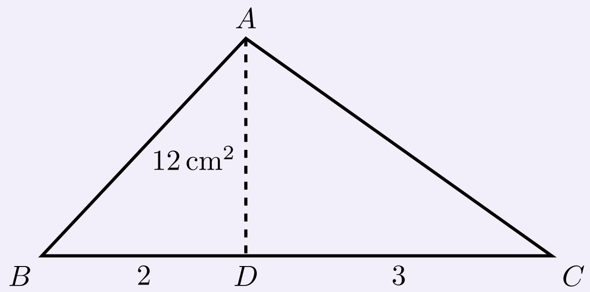
6.2 面積比を使う問題

面積比で早く解く

相似な三角形で、長さの比が分かると、面積比も分かります。特に、同じ高さをもつ三角形では、底辺の比が面積比になります。

例題 12　底辺の比と面積比

$\triangle ABC$ で、点 D は辺 BC 上にあり、$BD : DC = 2 : 3$ である。$\triangle ABD$ の面積が $12\,\mathrm{cm}^2$ のとき、$\triangle ADC$ の面積を求めなさい。



解説

$\triangle ABD$ と $\triangle ADC$ は、頂点 A から直線 BC への高さが同じです。したがって、面積比は底辺の比と同じになります。

$$\triangle ABD : \triangle ADC = BD : DC = 2 : 3$$

$\triangle ABD$ の面積 $12\,\mathrm{cm}^2$ が 2 にあたるので、1 にあたる面積は 6 です。

$$\triangle ADC = 6 \times 3 = 18$$

答え：$18\,\mathrm{cm}^2$

7 よくあるつまずき

つまずき 1　対応する辺を間違える

相似比を使うとき、対応していない辺どうしを比べると答えがずれます。まず、対応する角を確認し、そのあとに対応する辺をそろえましょう。

つまずき 2　相似比と面積比を混同する

相似比が $2:5$ でも、面積比は $2:5$ ではありません。面積比は

$$2^2 : 5^2 = 4 : 25$$

です。問題文が「長さ」なのか「面積」なのかを確認しましょう。

つまずき 3　証明で理由を書かない

「相似だから」とだけ書くのではなく、どの相似条件を使ったのかを書きましょう。たとえば、「2 組の角がそれぞれ等しいので」と書くと、採点者に伝わりやすくなります。

つまずき 4　平行線から角を見つけられない

平行線があるときは、同位角・錯角に注目します。図に印をつけると、相似な三角形が見つかりやすくなります。

8 勉強法

相似の勉強手順

(1) 相似条件を暗記する。

(2) 対応する辺と角を図に書き込む。

(3) 相似比で辺の長さを求める練習をする。

(4) 面積比・体積比を区別して練習する。

(5) 証明問題では、相似条件まで書く練習をする。

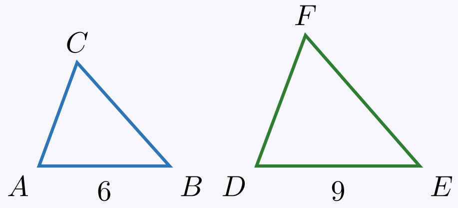
高校入試に向けて意識したいこと

高校入試では、相似だけで終わる問題よりも、平行線、角、面積比、円、三平方の定理などと組み合わせた問題が出やすいです。まずは基礎を固め、次に図の中から相似な三角形を自分で見つける練習をしましょう。

9　練習問題

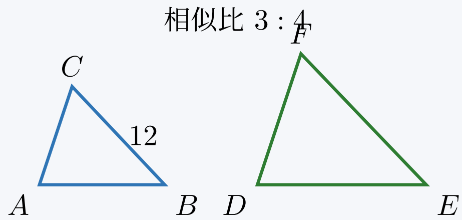
基本問題 1　相似比

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ で、$AB = 6\,\mathrm{cm}$、$DE = 9\,\mathrm{cm}$ である。$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ の相似比を求めなさい。



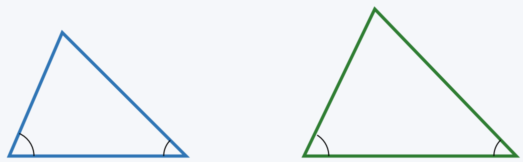
基本問題 2　辺の長さ

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ で、相似比が $3:4$ である。$BC = 12\,\mathrm{cm}$ のとき、対応する辺 EF の長さを求めなさい。



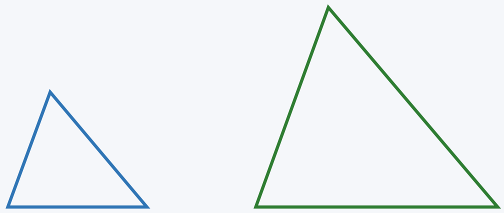
基本問題 3　相似条件

2 つの三角形で、2 組の角がそれぞれ等しい。このとき、2 つの三角形が相似であるといえるか。理由も書きなさい。



基本問題 4 面積比

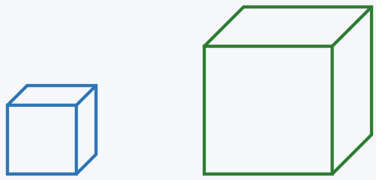
2 つの相似な図形の相似比が 4 : 7 である。このとき、面積比を求めなさい。



相似比 4 : 7

基本問題 5 体積比

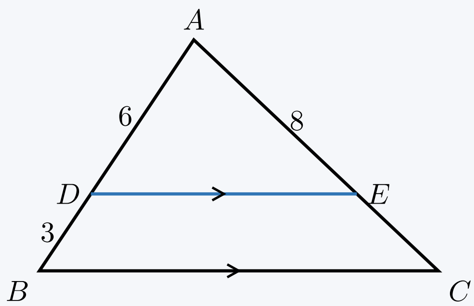
相似な 2 つの立体の相似比が 2 : 5 である。このとき、体積比を求めなさい。



相似比 2 : 5

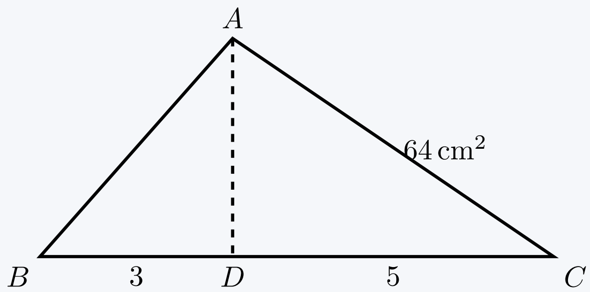
入試問題 1 平行線と線分比

$\triangle ABC$ で、点 D は AB 上、点 E は AC 上にあり、$DE \parallel BC$ である。$AD = 6\,\mathrm{cm}$、$DB = 3\,\mathrm{cm}$、$AE = 8\,\mathrm{cm}$ のとき、EC の長さを求めなさい。



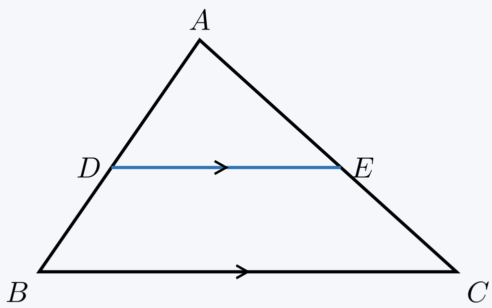
入試問題 2　面積比

$\triangle ABC$ で、点 D は辺 BC 上にあり、$BD : DC = 3 : 5$ である。$\triangle ABC$ の面積が $64\,\mathrm{cm}^2$ のとき、$\triangle ABD$ の面積を求めなさい。



入試問題 3　相似の証明

$\triangle ABC$ で、点 D は AB 上、点 E は AC 上にあり、$DE \parallel BC$ である。このとき、$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ であることを証明しなさい。



10　練習問題の解答・解説

基本問題 1　相似比

AB と DE が対応しているので、

$$AB : DE = 6 : 9 = 2 : 3$$

答え：$2 : 3$

基本問題 2　辺の長さ

相似比が $3 : 4$ なので、

$$BC : EF = 3 : 4$$

$EF = x$ とすると、

$$12 : x = 3 : 4$$

$$3x = 48$$

$$x = 16$$

答え：$16\,\mathrm{cm}$

基本問題 3　相似条件

三角形の相似条件より、2 組の角がそれぞれ等しければ、2 つの三角形は相似であるといえます。

答え：いえる。理由は、2 組の角がそれぞれ等しいから。

基本問題 4　面積比

面積比は相似比の 2 乗なので、

$$4^2 : 7^2 = 16 : 49$$

答え：$16 : 49$

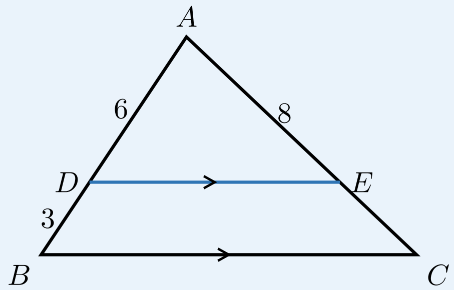
基本問題 5　体積比

体積比は相似比の 3 乗なので、

$$2^3 : 5^3 = 8 : 125$$

答え：$8 : 125$

入試問題 1　平行線と線分比



$DE \parallel BC$ なので、$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ です。

$$AB = AD + DB = 6 + 3 = 9$$

相似比は

$$AD : AB = 6 : 9 = 2 : 3$$

したがって、

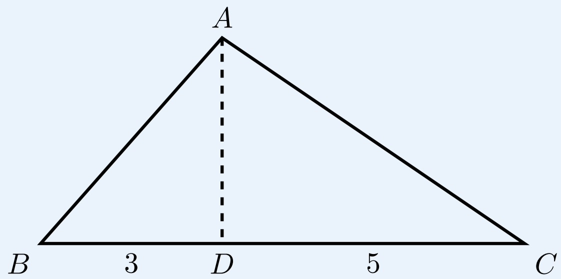
$$AE : AC = 2 : 3$$

$AE = 8$ なので、$AC = 12$ です。よって、

$$EC = AC - AE = 12 - 8 = 4$$

答え： $4\,\mathrm{cm}$

入試問題 2　面積比



$\triangle ABD$ と $\triangle ADC$ は高さが同じなので、面積比は底辺の比と同じです。

$$\triangle ABD : \triangle ADC = BD : DC = 3 : 5$$

全体は $3 + 5 = 8$ にあたります。$\triangle ABC$ の面積が $64\,\mathrm{cm}^2$ なので、1 にあたる面積は

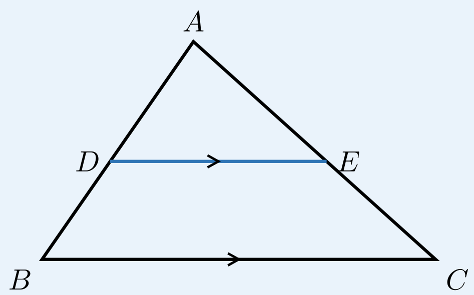
$$64 \div 8 = 8$$

したがって、$\triangle ABD$ の面積は

$$8 \times 3 = 24$$

答え： $24\,\mathrm{cm}^2$

入試問題 3　相似の証明



$DE \parallel BC$ より、平行線の同位角または錯角が等しいので、

$$\angle ADE = \angle ABC$$

$$\angle AED = \angle ACB$$

2 組の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

答え： 上のように、2 組の角が等しいことを示して相似条件を書く。

11 まとめ

相似で覚えること

- 相似とは、拡大・縮小すると重なる図形である。
- 相似な図形では、対応する角が等しく、対応する辺の比が等しい。
- 三角形の相似条件は 3 つある。
- 相似比が $a:b$ なら、面積比は $a^2:b^2$、体積比は $a^3:b^3$ である。
- 平行線があるときは、相似な三角形を探す。
- 証明では、等しい角や辺の比を書き、相似条件を明記する。

最後に

相似は、図形の中でも高校入試に出やすい単元です。最初は「どの三角形が相似なのか」を見つけるのが難しく感じるかもしれません。図に印をつけながら、対応する点、対応する辺、相似比を丁寧に確認しましょう。