

中学数学

平方根

応用編

偏差値 55 以上を目指す入試応用対策

平方根の式変形・整数部分・図形への利用を、
入試で差がつく問題につなげて練習します。

目次

1	この教材の使い方	2
2	平方根の大小と整数部分	3
2.1	はさみうちで考える	3
2.2	小数部分を文字で表す	4
3	根号を含む式の変形	7
3.1	式の形を見て簡単にする	7
3.2	分配法則と平方根	9
4	有理化と式の値	12
4.1	分母が二項の有理化	12
4.2	式の値を工夫して求める	14
5	平方根と図形	17
5.1	正方形の対角線	17
5.2	座標上の距離	19
6	入試大問につながる応用例題	22
6.1	条件を満たす整数	22
6.2	文字を含む根号の条件	23
7	単元まとめ練習問題	26
7.1	問題	26
7.2	解答解説	27
8	学習チェックリスト	32
9	まとめ	33

1 この教材の使い方

この教材は、平方根の基本計算ができる人が、入試で差がつく応用問題に対応するための教材です。計算だけでなく、式の形を見抜く力、整数部分を利用する力、図形と平方根をつなげる力を身につけます。

学習の進め方

1. まず「ポイント」で、応用問題で使う見方を確認します。
2. 例題では、「方針」で解く道筋を確認してから「解き方」を読みます。
3. 練習問題では、途中式を省略せず、根号の中と係数を分けて考えます。
4. 最後のまとめ練習問題で、入試小問から大問の入口まで確認します。

注意 この教材で大切にすること

平方根の応用問題では、**根号を簡単にすること**だけでなく、**どの形に変形すれば使いやすいか**を考えることが大切です。計算を始める前に、式全体の形を見ましょう。

2 平方根の大小と整数部分

2.1 はさみうちで考える

整数部分の考え方

平方根の大きさは、近い平方数ではさみます。

$$3^2 = 9 < 13 < 16 = 4^2$$

このとき、 $3 < \sqrt{13} < 4$ です。したがって、 $\sqrt{13}$ の整数部分は 3 です。

例題 1

$\sqrt{52}$ の整数部分を求めなさい。

方針

52 をはさむ平方数を探します。平方数の間に入れることで、平方根の範囲を決めます。

解き方

52 に近い平方数を考えます。

$$7^2 = 49, \quad 8^2 = 64$$

したがって、

$$49 < 52 < 64$$

です。

平方根をとると、

$$7 < \sqrt{52} < 8$$

となります。

よって、 $\sqrt{52}$ は 7 より大きく 8 より小さい数です。

答え

7

練習問題 1

$\sqrt{75}$ の整数部分を求めなさい。

解答解説 1**解き方**

75 に近い平方数を考えます。

$$8^2 = 64, \quad 9^2 = 81$$

よって、

$$64 < 75 < 81$$

です。

平方根をとると、

$$8 < \sqrt{75} < 9$$

となります。

答え

8

2.2 小数部分を文字で表す**小数部分の使い方**

\sqrt{n} の整数部分が a のとき、小数部分は

$$\sqrt{n} - a$$

と表せます。入試では、この小数部分を使って式の値を求める問題がよく出ます。

例題 2

$\sqrt{18}$ の小数部分を a とするとき、 $a^2 + 4a$ の値を求めなさい。

方針

まず $\sqrt{18}$ の整数部分を求め、小数部分 a を式で表します。そのあと、 a を代入して整理します。

解き方

$$4^2 = 16 < 18 < 25 = 5^2$$

なので、

$$4 < \sqrt{18} < 5$$

です。よって、 $\sqrt{18}$ の整数部分は 4 です。

小数部分は、

$$a = \sqrt{18} - 4$$

です。

これを代入します。

$$a^2 + 4a = (\sqrt{18} - 4)^2 + 4(\sqrt{18} - 4)$$

展開します。

$$18 - 8\sqrt{18} + 16 + 4\sqrt{18} - 16$$

整理すると、

$$18 - 4\sqrt{18}$$

です。

答え

$$18 - 4\sqrt{18}$$

練習問題 2

$\sqrt{27}$ の小数部分を b とするとき、 $b^2 + 6b$ の値を求めなさい。

解答解説 2

解き方

$$5^2 = 25 < 27 < 36 = 6^2$$

なので、 $\sqrt{27}$ の整数部分は 5 です。

したがって、

$$b = \sqrt{27} - 5$$

です。

代入すると、

$$\begin{aligned} b^2 + 6b &= (\sqrt{27} - 5)^2 + 6(\sqrt{27} - 5) \\ &= 27 - 10\sqrt{27} + 25 + 6\sqrt{27} - 30 \\ &= 22 - 4\sqrt{27} \end{aligned}$$

です。

答え

$$22 - 4\sqrt{27}$$

3 根号を含む式の変形

3.1 式の形を見て簡単にする

まず簡単にしてから計算する

平方根の計算では、最初に根号の中をできるだけ簡単にします。

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}$$

複雑な式でも、**同じ根号を作る**と計算しやすくなります。

例題 3

次の計算をなさい。

$$\sqrt{50} + \sqrt{98} - \sqrt{8}$$

方針

それぞれの根号を簡単にし、同じ $\sqrt{2}$ の形にそろえます。

解き方

まず、それぞれを簡単にします。

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{98} = \sqrt{49 \times 2} = 7\sqrt{2}$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$$

したがって、

$$\sqrt{50} + \sqrt{98} - \sqrt{8} = 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$$

です。

係数を計算すると、

$$(5 + 7 - 2)\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

です。

答え

$$10\sqrt{2}$$

練習問題 3

次の計算をなさい。

$$\sqrt{75} - \sqrt{27} + \sqrt{12}$$

解答解説 3**解き方**

それぞれを簡単にします。

$$\sqrt{75} = 5\sqrt{3}, \quad \sqrt{27} = 3\sqrt{3}, \quad \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

したがって、

$$5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

です。

答え

$$4\sqrt{3}$$

3.2 分配法則と平方根**乗法公式を使う**

平方根を含む式でも、乗法公式が使えます。

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$$

特に、 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ を使って整理します。

例題 4

次の式を展開し、簡単にしなさい。

$$(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$$

方針

$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ を使います。 $\sqrt{5}\sqrt{3} = \sqrt{15}$ に注意します。

解き方

乗法公式を使います。

$$(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2$$

それぞれ計算すると、

$$5 + 2\sqrt{15} + 3$$

です。

整数部分をまとめて、

$$8 + 2\sqrt{15}$$

となります。

答え

$$8 + 2\sqrt{15}$$

練習問題 4

次の式を展開し、簡単にしなさい。

$$(\sqrt{7} - \sqrt{2})^2$$

解答解説 4**解き方**

$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ を使います。

$$\begin{aligned}(\sqrt{7} - \sqrt{2})^2 &= (\sqrt{7})^2 - 2\sqrt{7}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \\ &= 7 - 2\sqrt{14} + 2 \\ &= 9 - 2\sqrt{14}\end{aligned}$$

です。

答え

$$9 - 2\sqrt{14}$$

4 有理化と式の値

4.1 分母が二項の有理化

共役な式をかける

分母が $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ のような形のときは、符号を変えた**共役な式**をかけます。

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$$

この形を使うと、分母から根号をなくせます。

例題 5

次の分母を有理化しなさい。

$$\frac{1}{\sqrt{5}+2}$$

方針

分母の $\sqrt{5}+2$ に対して、符号を変えた $\sqrt{5}-2$ を分母と分子にかけます。

解き方

$$\frac{1}{\sqrt{5}+2} \times \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2}$$

とします。

分母は、

$$(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2) = 5 - 4 = 1$$

です。

したがって、

$$\frac{1}{\sqrt{5}+2} = \sqrt{5}-2$$

です。

答え

$$\sqrt{5}-2$$

練習問題 5

次の分母を有理化しなさい。

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1}$$

解答解説 5**解き方**

分母と分子に $\sqrt{3} - 1$ をかけます。

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$$

分母は、

$$(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) = 3 - 1 = 2$$

です。

答え

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

4.2 式の値を工夫して求める**代入前に式を変形する**

平方根を含む式の値では、すぐに代入するより、式を先に因数分解したり乗法公式で整理したりすると楽になります。

例題 6

$x = \sqrt{3} + 1$ のとき、 $x^2 - 2x$ の値を求めなさい。

方針

$x^2 - 2x$ を $x(x - 2)$ と見てもよいですが、ここでは代入して乗法公式で整理します。

解き方

$x = \sqrt{3} + 1$ を代入します。

$$x^2 - 2x = (\sqrt{3} + 1)^2 - 2(\sqrt{3} + 1)$$

まず、

$$(\sqrt{3} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{3} + 1 = 4 + 2\sqrt{3}$$

です。

したがって、

$$(4 + 2\sqrt{3}) - (2\sqrt{3} + 2)$$

となります。

同類項をまとめると、

$$2$$

です。

答え

2

練習問題 6

$x = \sqrt{5} - 1$ のとき、 $x^2 + 2x$ の値を求めなさい。

解答解説 6**解き方**

代入します。

$$x^2 + 2x = (\sqrt{5} - 1)^2 + 2(\sqrt{5} - 1)$$

$$(\sqrt{5} - 1)^2 = 5 - 2\sqrt{5} + 1 = 6 - 2\sqrt{5}$$

よって、

$$(6 - 2\sqrt{5}) + (2\sqrt{5} - 2) = 4$$

です。

答え

4

5 平方根と図形

5.1 正方形の対角線

三平方の定理の入口

1 辺が a の正方形の対角線の長さは、三平方の定理より

$$\sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

です。平方根は、図形の長さにもよく出てきます。

例題 7

1 辺が 6cm の正方形の対角線の長さを求めなさい。

方針

正方形を対角線で 2 つの直角三角形に分けます。直角三角形の 2 辺が 6cm、6cm です。

解き方

対角線の長さを x cm とします。

三平方の定理より、

$$x^2 = 6^2 + 6^2$$

です。

計算すると、

$$x^2 = 36 + 36 = 72$$

となります。

したがって、

$$x = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

です。

答え

$$6\sqrt{2} \text{ cm}$$

練習問題 7

1 辺が 5cm の正方形の対角線の長さを求めなさい。

解答解説 7**解き方**

対角線の長さを x cm とします。

三平方の定理より、

$$x^2 = 5^2 + 5^2 = 50$$

です。

したがって、

$$x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

です。

答え

$$5\sqrt{2} \text{ cm}$$

5.2 座標上の距離**横の差と縦の差を見る**

座標平面上の 2 点間の距離は、横の差と縦の差を直角三角形の 2 辺と考えます。

$$\text{距離} = \sqrt{(\text{横の差})^2 + (\text{縦の差})^2}$$

例題 8

2点 $A(1, 2)$ 、 $B(5, 5)$ の距離を求めなさい。

方針

横の差と縦の差を求め、直角三角形を考えます。

解き方

横の差は、

$$5 - 1 = 4$$

です。

縦の差は、

$$5 - 2 = 3$$

です。

したがって、距離は、

$$\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

です。

答え

5

練習問題 8

2点 $A(-1, 3)$ 、 $B(4, -2)$ の距離を求めなさい。

解答解説 8

解き方

横の差は、

$$4 - (-1) = 5$$

です。

縦の差は、

$$-2 - 3 = -5$$

なので、長さとしては5です。

距離は、

$$\sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

です。

答え

$$5\sqrt{2}$$

6 入試大問につながる応用例題

6.1 条件を満たす整数

範囲から整数をしぼる

平方根を含む不等式では、平方数ではさんで範囲を決めます。範囲がわかれば、条件を満たす整数を順に確認できます。

例題 9

整数 x について、 $2 < \sqrt{x} < 5$ を満たす x をすべて求めなさい。

方針

すべての辺を 2 乗して、 x の範囲に直します。 x は整数であることを忘れないようにします。

解き方

$$2 < \sqrt{x} < 5$$

の各辺を 2 乗します。

\sqrt{x} は 0 以上なので、大小関係はそのままです。

$$4 < x < 25$$

となります。

x は整数なので、

$$5, 6, 7, \dots, 24$$

が条件を満たします。

答え

$$5, 6, 7, \dots, 24$$

練習問題 9

整数 x について、 $3 < \sqrt{x} < 6$ を満たす x をすべて求めなさい。

解答解説 9

解き方

各辺を 2 乗します。

$$3 < \sqrt{x} < 6$$

より、

$$9 < x < 36$$

です。

x は整数なので、

$$10, 11, 12, \dots, 35$$

です。

答え

$$10, 11, 12, \dots, 35$$

6.2 文字を含む根号の条件

根号の中身に注目する

\sqrt{n} が整数になるのは、 n が平方数のときです。文字を含む問題では、**根号の中が平方数になる条件**を考えます。

例題 10

自然数 n について、 $\sqrt{3n}$ が整数となる最小の n を求めなさい。

方針

$3n$ が平方数になるようにします。3 の指数が偶数になるように、足りない因数を補います。

解き方

$\sqrt{3n}$ が整数になるには、 $3n$ が平方数であればよいです。

平方数では、素因数の個数がすべて偶数になります。

3 は 1 個だけなので、もう 1 個 3 をかけると、

$$3 \times 3 = 9$$

となり平方数になります。

したがって、最小の n は 3 です。

答え

3

練習問題 10

自然数 n について、 $\sqrt{12n}$ が整数となる最小の n を求めなさい。

解答解説 10**解き方**

$$12 = 2^2 \times 3$$

です。

2 はすでに 2 個ありますが、3 は 1 個だけです。

平方数にするには、もう 1 個 3 が必要です。

したがって、最小の n は 3 です。

答え

3

7 単元まとめ練習問題

ここでは、平方根の応用問題をまとめて確認します。根号の変形、整数部分、有理化、図形への利用をバランスよく練習しましょう。

7.1 問題

練習問題 まとめ 1

$\sqrt{63}$ の整数部分を求めなさい。

練習問題 まとめ 2

$\sqrt{32}$ の小数部分を a とするとき、 $a^2 + 6a$ の値を求めなさい。

練習問題 まとめ 3

次の計算をしなさい。

$$\sqrt{108} - \sqrt{48} + \sqrt{12}$$

練習問題 まとめ 4

次の式を展開し、簡単にしなさい。

$$(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2$$

練習問題 まとめ 5

次の分母を有理化しなさい。

$$\frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$$

練習問題 まとめ 6

1 辺が 8cm の正方形の対角線の長さを求めなさい。

練習問題 まとめ 7

整数 x について、 $4 < \sqrt{x} < 7$ を満たす x をすべて求めなさい。

練習問題 まとめ 8

自然数 n について、 $\sqrt{18n}$ が整数となる最小の n を求めなさい。

7.2 解答解説**解答解説 まとめ 1**

解き方

$$7^2 = 49 < 63 < 64 = 8^2$$

なので、

$$7 < \sqrt{63} < 8$$

です。

答え

7

解答解説 まとめ 2

解き方

$$5^2 = 25 < 32 < 36 = 6^2$$

なので、 $\sqrt{32}$ の整数部分は 5 です。

したがって、

$$a = \sqrt{32} - 5$$

です。

代入すると、

$$\begin{aligned} a^2 + 6a &= (\sqrt{32} - 5)^2 + 6(\sqrt{32} - 5) \\ &= 32 - 10\sqrt{32} + 25 + 6\sqrt{32} - 30 \\ &= 27 - 4\sqrt{32} \end{aligned}$$

です。

答え

$$27 - 4\sqrt{32}$$

解答解説 まとめ 3**解き方**

それぞれを簡単にします。

$$\sqrt{108} = 6\sqrt{3}, \quad \sqrt{48} = 4\sqrt{3}, \quad \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

よって、

$$6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

です。

答え

$$4\sqrt{3}$$

解答解説 まとめ 4**解き方**

乗法公式を使います。

$$\begin{aligned}(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 &= 6 + 2\sqrt{12} + 2 \\ &= 8 + 2 \times 2\sqrt{3} \\ &= 8 + 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

です。

答え

$$8 + 4\sqrt{3}$$

解答解説 まとめ 5

解き方

分母と分子に $\sqrt{7} - \sqrt{3}$ をかけます。

$$\frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$$

分母は、

$$7 - 3 = 4$$

です。

答え

$$\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{4}$$

解答解説 まとめ 6

解き方

対角線の長さを x cm とします。

$$x^2 = 8^2 + 8^2 = 128$$

なので、

$$x = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

です。

答え

$$8\sqrt{2} \text{ cm}$$

解答解説 まとめ 7**解き方**

各辺を 2 乗します。

$$4 < \sqrt{x} < 7$$

より、

$$16 < x < 49$$

です。

x は整数なので、

$$17, 18, 19, \dots, 48$$

です。

答え

$$17, 18, 19, \dots, 48$$

解答解説 まとめ 8**解き方**

$$18 = 2 \times 3^2$$

です。

平方数にするには、2 をもう 1 個かければよいです。

したがって、最小の n は 2 です。

答え

2

8 学習チェックリスト

次の項目を確認し、できるようになったものにチェックを入れましょう。

チェックリスト

- 平方数ではさんで、平方根の整数部分を求められる。
- 小数部分を $\sqrt{n} - a$ の形で表せる。
- 根号を簡単にしてから、同類項をまとめられる。
- 平方根を含む式で乗法公式を使える。
- 分母が二項の有理化ができる。
- 平方根を含む式の値を、工夫して求められる。
- 正方形の対角線や座標上の距離に平方根を使える。
- \sqrt{x} を含む不等式から、整数の範囲を求められる。
- 根号の中が平方数になる条件を考えられる。

9 まとめ

平方根・応用編の重要ポイント

- 平方根の大小は、近い平方数ではさんで判断する。
- 小数部分は、もとの数から整数部分をひいて表す。
- 根号の中を簡単にし、同じ根号を作ると計算しやすい。
- 平方根を含む式でも、乗法公式や因数分解を使える。
- 二項の分母は、共役な式をかけて有理化する。
- 図形や座標の距離では、平方根が長さとして現れる。
- 根号の中が平方数になる条件を考えると、整数問題に対応できる。

次に取り組むこと

平方根の応用問題では、式を見てから計算を始めることが大切です。平方根が安定したら、関数や図形の問題でも、長さや座標の計算に平方根を使えるように練習しましょう。