

中学数学

平方根

標準編

偏差値 50 前後を目指す入試標準対策

平方根の変形・四則計算・近似値を、
入試標準問題で使える形まで練習します。

目次

1	この教材の使い方	2
2	平方根の意味と大小	3
2.1	平方根と根号の確認	3
2.2	平方根の大小	4
3	根号を簡単にする	7
3.1	平方数を外に出す	7
3.2	素因数分解を使う	9
4	平方根の加法・減法	12
4.1	同じ根号をまとめる	12
4.2	簡単にしてからまとめる	13
5	平方根の乗法・除法	16
5.1	根号どうしの積	16
5.2	有理化の基本	18
6	式の値と平方根	21
6.1	代入して計算する	21
6.2	展開公式を使う	22
7	近似値と整数部分	25
7.1	平方根の近似値	25
7.2	整数部分を求める	26
8	単元まとめ練習問題	29
8.1	問題	29
8.2	解答解説	30
9	学習チェックリスト	35
10	まとめ	36

1 この教材の使い方

この教材は、平方根の基本を確認したあと、入試標準問題でよく出る計算や考え方を身につけるための教材です。根号の変形、四則計算、近似値、式の値をバランスよく練習します。

学習の進め方

1. まず「ポイント」で、問題の見方を確認します。
2. 例題では、「方針」で解く道筋をつかんでから「解き方」を読みます。
3. 練習問題では、途中式を必ず書き、根号の中を確認します。
4. 最後のまとめ練習問題で、入試小問レベルの確認をします。

注意 この教材で大切にすること

平方根の標準問題では、**根号を簡単にすることと同類項としてまとめることが大切です。**
答えだけを急がず、どこを変形しているのかを途中式で確認しましょう。

2 平方根の意味と大小

2.1 平方根と根号の確認

平方根の基本

a の平方根とは、2 乗すると a になる数です。 $a > 0$ のとき、平方根は 2 つあります。

$$\sqrt{a}, \quad -\sqrt{a}$$

ただし、 \sqrt{a} は正の平方根を表します。

例題 1

次の数の平方根をすべて答えなさい。

$$49$$

方針

2 乗して 49 になる数を、正の数と負の数の両方から考えます。

解き方

7 を 2 乗すると、

$$7^2 = 49$$

です。

また、 -7 を 2 乗しても、

$$(-7)^2 = 49$$

です。

したがって、49 の平方根は 2 つあります。

答え

$$7, \quad -7$$

練習問題 1

次の数の平方根をすべて答えなさい。

64

解答解説 1**解き方**

2乗して64になる数を考えます。

$$8^2 = 64, \quad (-8)^2 = 64$$

です。

答え

8, -8

2.2 平方根の大小**根号のまま大小を比べる**

正の数どうしでは、根号の中の数が大きいほど、平方根も大きくなります。

$$5 < 7 \quad \text{なので} \quad \sqrt{5} < \sqrt{7}$$

小数に直さなくても比べられることがあります。

例題 2

次の数を小さい順に並べなさい。

$$\sqrt{3}, 2, \sqrt{7}$$

方針

2 を平方根の形に直してから比べます。

解き方

2 は、

$$2 = \sqrt{4}$$

と表せます。

したがって、

$$\sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{7}$$

を比べればよいです。

根号の中の数を比べると、

$$3 < 4 < 7$$

なので、

$$\sqrt{3} < 2 < \sqrt{7}$$

です。

答え

$$\sqrt{3}, 2, \sqrt{7}$$

練習問題 2

次の数を小さい順に並べなさい。

$$3, \sqrt{5}, \sqrt{10}$$

解答解説 2**解き方**

3は、

$$3 = \sqrt{9}$$

です。

したがって、

$$\sqrt{5}, \sqrt{9}, \sqrt{10}$$

を比べます。

根号の中の数を比べると、

$$5 < 9 < 10$$

です。

答え

$$\sqrt{5}, 3, \sqrt{10}$$

3 根号を簡単にする

3.1 平方数を外に出す

根号を簡単にする考え方

根号の中に平方数があるときは、外に出して簡単にします。

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

標準問題では、**平方数を見つける**ことが大切です。

例題 3

次の数を簡単にしなさい。

$$\sqrt{72}$$

方針

72 を、平方数と残りの数の積に分けます。

解き方

72 は、

$$72 = 36 \times 2$$

と分けられます。

したがって、

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2}$$

です。

36 は平方数なので、

$$\sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}$$

となります。

答え

$$6\sqrt{2}$$

練習問題 3

次の数を簡単にしなさい。

$$\sqrt{50}$$

解答解説 3**解き方**

50 は、

$$50 = 25 \times 2$$

と分けられます。

したがって、

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$$

です。

答え

$$5\sqrt{2}$$

3.2 素因数分解を使う**大きい数は素因数分解**

すぐに平方数が見つからないときは、素因数分解を使います。同じ素数が 2 個ずつそろったら、1 個を根号の外に出します。

例題 4

次の数を簡単にしなさい。

$$\sqrt{180}$$

方針

180 を素因数分解し、2 個組になっている因数を根号の外に出します。

解き方

180 を素因数分解します。

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$

です。

2^2 と 3^2 は平方数なので、

$$\begin{aligned}\sqrt{180} &= \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 5} \\ &= 2 \times 3\sqrt{5}\end{aligned}$$

となります。

答え

$$6\sqrt{5}$$

練習問題 4

次の数を簡単にしなさい。

$$\sqrt{200}$$

解答解説 4**解き方**

200 を素因数分解します。

$$200 = 2^3 \times 5^2 = 2^2 \times 5^2 \times 2$$

です。

したがって、

$$\sqrt{200} = 2 \times 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

です。

答え

$$10\sqrt{2}$$

4 平方根の加法・減法

4.1 同じ根号をまとめる

平方根のたし算・ひき算

平方根の加法・減法では、根号の中が同じものだけをまとめます。

$$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

$$4\sqrt{3} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

例題 5

次の計算をなさい。

$$5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{3}$$

方針

根号の中がすべて 3 なので、係数だけを計算します。

解き方

根号の中はすべて 3 です。

したがって、係数をまとめます。

$$\begin{aligned} 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} &= (5 - 2 + 1)\sqrt{3} \\ &= 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

です。

答え

$$4\sqrt{3}$$

練習問題 5

次の計算をなさい。

$$7\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$$

解答解説 5**解き方**

根号の中はすべて5なので、係数だけを計算します。

$$\begin{aligned}7\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} &= (7 - 3 + 2)\sqrt{5} \\ &= 6\sqrt{5}\end{aligned}$$

です。

答え

$$6\sqrt{5}$$

4.2 簡単にしてからまとめる**先に根号を簡単にする**

一見まとめられない式でも、根号を簡単にすると同じ根号になることがあります。

$$\sqrt{12} + \sqrt{27} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

例題 6

次の計算をなさい。

$$\sqrt{75} - \sqrt{12}$$

方針

それぞれの平方根を簡単にしてから、同じ根号をまとめます。

解き方

まず、根号を簡単にします。

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = 5\sqrt{3}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

です。

したがって、

$$\begin{aligned}\sqrt{75} - \sqrt{12} &= 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \\ &= 3\sqrt{3}\end{aligned}$$

です。

答え

$$3\sqrt{3}$$

練習問題 6

次の計算をなさい。

$$\sqrt{48} + \sqrt{27}$$

解答解説 6**解き方**

まず、根号を簡単にします。

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$$

$$\sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3}$$

です。

したがって、

$$\sqrt{48} + \sqrt{27} = 4\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

です。

答え

$$7\sqrt{3}$$

5 平方根の乗法・除法

5.1 根号どうしの積

平方根のかけ算

平方根のかけ算では、根号の中どうしをかけます。

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

ただし、最後に根号を簡単にすることを忘れないようにします。

例題 7

次の計算をなさい。

$$\sqrt{6} \times \sqrt{15}$$

方針

根号の中をかけてから、平方数を外に出します。

解き方

根号の中をかけると、

$$\sqrt{6} \times \sqrt{15} = \sqrt{90}$$

です。

90 は、

$$90 = 9 \times 10$$

と分けられます。

したがって、

$$\sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

です。

答え

$$3\sqrt{10}$$

練習問題 7

次の計算をなさい。

$$\sqrt{8} \times \sqrt{18}$$

解答解説 7

解き方

根号の中をかけます。

$$\sqrt{8} \times \sqrt{18} = \sqrt{144}$$

です。

$144 = 12^2$ なので、

$$\sqrt{144} = 12$$

です。

答え

12

5.2 有理化の基本

分母に根号があるとき

分母に根号があるときは、分母と分子に同じ平方根をかけて、分母を整数にします。この操作を**有理化**といいます。

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

例題 8

次の数の分母を有理化しなさい。

$$\frac{5}{\sqrt{2}}$$

方針

分母と分子に $\sqrt{2}$ をかけます。

解き方

分母を整数にするために、分母と分子に $\sqrt{2}$ をかけます。

$$\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$$

分母は、

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$$

です。

したがって、

$$\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

となります。

答え

$$\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

練習問題 8

次の数の分母を有理化しなさい。

$$\frac{3}{\sqrt{5}}$$

解答解説 8

解き方

分母と分子に $\sqrt{5}$ をかけます。

$$\begin{aligned}\frac{3}{\sqrt{5}} &= \frac{3 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} \\ &= \frac{3\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

です。

答え

$$\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

6 式の値と平方根

6.1 代入して計算する

式の値の考え方

平方根を含む式の値では、まず文字に値を代入します。そのあと、展開や根号の計算を使って整理します。

例題 9

$x = \sqrt{3}$ のとき、次の式の値を求めなさい。

$$2x^2 - 5$$

方針

$x = \sqrt{3}$ を代入します。 $\sqrt{3}$ を 2 乗すると 3 になることを使います。

解き方

$x = \sqrt{3}$ を代入します。

$$2x^2 - 5 = 2(\sqrt{3})^2 - 5$$

$(\sqrt{3})^2 = 3$ なので、

$$2(\sqrt{3})^2 - 5 = 2 \times 3 - 5$$

$$= 6 - 5 = 1$$

です。

答え

練習問題 9

$x = \sqrt{5}$ のとき、次の式の値を求めなさい。

$$3x^2 - 7$$

解答解説 9

解き方

$x = \sqrt{5}$ を代入します。

$$3x^2 - 7 = 3(\sqrt{5})^2 - 7$$

$(\sqrt{5})^2 = 5$ なので、

$$3 \times 5 - 7 = 15 - 7 = 8$$

です。

答え

8

6.2 展開式を使う

平方根と展開公式

$(a + b)^2$ や $(a + b)(a - b)$ の公式は、平方根を含む式でも使えます。

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

例題 10

次の計算をなさい。

$$(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)$$

方針

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ を使います。

解き方

$a = \sqrt{5}$ 、 $b = 2$ と見ると、

$$(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2) = (\sqrt{5})^2 - 2^2$$

です。

それぞれ計算すると、

$$(\sqrt{5})^2 = 5, \quad 2^2 = 4$$

です。

したがって、

$$5 - 4 = 1$$

となります。

答え

1

練習問題 10

次の計算をなさい。

$$(\sqrt{7} + 3)(\sqrt{7} - 3)$$

解答解説 10**解き方**

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ を使います。

$$\begin{aligned}(\sqrt{7} + 3)(\sqrt{7} - 3) &= (\sqrt{7})^2 - 3^2 \\ &= 7 - 9 = -2\end{aligned}$$

です。

答え

-2

7 近似値と整数部分

7.1 平方根の近似値

よく使う近似値

入試では、平方根の近似値を使う問題があります。代表的な値は覚えておくと便利です。

数	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$
近似値	1.414	1.732	2.236

例題 11

$\sqrt{2} = 1.414$ として、次の値を小数で求めなさい。

$$3\sqrt{2}$$

方針

$\sqrt{2}$ に 1.414 を代入して計算します。

解き方

$\sqrt{2} = 1.414$ なので、

$$3\sqrt{2} = 3 \times 1.414$$

です。

計算すると、

$$3 \times 1.414 = 4.242$$

です。

答え

$$4.242$$

練習問題 11

$\sqrt{3} = 1.732$ として、次の値を小数で求めなさい。

$$2\sqrt{3}$$

解答解説 11**解き方**

$\sqrt{3} = 1.732$ なので、

$$2\sqrt{3} = 2 \times 1.732$$

です。

計算すると、

$$2 \times 1.732 = 3.464$$

です。

答え

$$3.464$$

7.2 整数部分を求める**平方数ではさむ**

\sqrt{n} の整数部分を求めるときは、近い平方数ではさみます。

$$3^2 = 9, \quad 4^2 = 16$$

なので、 $\sqrt{13}$ は 3 より大きく 4 より小さいです。

例題 12

$\sqrt{30}$ の整数部分を求めなさい。

方針

30 を、前後の平方数ではさみます。

解き方

30 の前後にある平方数を考えます。

$$5^2 = 25, \quad 6^2 = 36$$

です。

したがって、

$$25 < 30 < 36$$

なので、

$$5 < \sqrt{30} < 6$$

です。

よって、 $\sqrt{30}$ の整数部分は 5 です。

答え

5

練習問題 12

$\sqrt{45}$ の整数部分を求めなさい。

解答解説 12**解き方**

45 の前後にある平方数を考えます。

$$6^2 = 36, \quad 7^2 = 49$$

です。

したがって、

$$36 < 45 < 49$$

なので、

$$6 < \sqrt{45} < 7$$

です。

答え

6

8 単元まとめ練習問題

ここでは、平方根の標準問題をまとめて確認します。途中式を書き、根号を簡単にしてから答えましょう。

8.1 問題

練習問題 まとめ 1

81 の平方根をすべて答えなさい。

練習問題 まとめ 2

次の数を小さい順に並べなさい。

$$\sqrt{6}, 2, \sqrt{3}$$

練習問題 まとめ 3

次の数を簡単にしなさい。

$$\sqrt{108}$$

練習問題 まとめ 4

次の計算をしなさい。

$$\sqrt{12} + \sqrt{75}$$

練習問題 まとめ 5

次の計算をしなさい。

$$\sqrt{10} \times \sqrt{40}$$

練習問題 まとめ 6

次の数の分母を有理化しなさい。

$$\frac{4}{\sqrt{3}}$$

練習問題 まとめ 7

$x = \sqrt{2}$ のとき、 $5x^2 - 6$ の値を求めなさい。

練習問題 まとめ 8

$\sqrt{70}$ の整数部分を求めなさい。

8.2 解答解説**解答解説 まとめ 1****解き方**

2 乗して 81 になる数を考えます。

$$9^2 = 81, \quad (-9)^2 = 81$$

です。

答え

$$9, \quad -9$$

解答解説 まとめ 2**解き方**

$2 = \sqrt{4}$ です。

したがって、

$$\sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{6}$$

を比べます。

答え

$$\sqrt{3}, 2, \sqrt{6}$$

解答解説 まとめ 3**解き方**

108 は、

$$108 = 36 \times 3$$

と分けられます。

したがって、

$$\sqrt{108} = \sqrt{36 \times 3} = 6\sqrt{3}$$

です。

答え

$$6\sqrt{3}$$

解答解説 まとめ 4**解き方**

まず、根号を簡単にします。

$$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \quad \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

です。

したがって、

$$\sqrt{12} + \sqrt{75} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

です。

答え

$$7\sqrt{3}$$

解答解説 まとめ 5**解き方**

根号の中をかけます。

$$\sqrt{10} \times \sqrt{40} = \sqrt{400}$$

です。

$400 = 20^2$ なので、

$$\sqrt{400} = 20$$

です。

答え

$$20$$

解答解説 まとめ 6**解き方**

分母と分子に $\sqrt{3}$ をかけます。

$$\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

です。

答え

$$\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

解答解説 まとめ 7**解き方**

$x = \sqrt{2}$ を代入します。

$$\begin{aligned} 5x^2 - 6 &= 5(\sqrt{2})^2 - 6 \\ &= 5 \times 2 - 6 = 4 \end{aligned}$$

です。

答え

$$4$$

解答解説 まとめ 8**解き方**

70 の前後にある平方数を考えます。

$$8^2 = 64, \quad 9^2 = 81$$

です。

したがって、

$$64 < 70 < 81$$

なので、

$$8 < \sqrt{70} < 9$$

です。

答え

8

9 学習チェックリスト

次の項目を確認し、できるようになったものにチェックを入れましょう。

チェックリスト

- 平方根の意味を説明できる。
- \sqrt{a} と $-\sqrt{a}$ の違いを説明できる。
- 数を平方根の形に直して大小を比べられる。
- 根号の中の平方数を外に出せる。
- 素因数分解を使って平方根を簡単にできる。
- 同じ根号をまとめて加法・減法ができる。
- 平方根の乗法を計算し、最後に簡単にできる。
- 分母の有理化ができる。
- 平方根を含む式の値を求められる。
- 平方数ではさんで、平方根の整数部分を求められる。

10 まとめ

平方根の重要ポイント

- $a > 0$ のとき、 a の平方根は 2 つある。
- \sqrt{a} は、正の平方根を表す。
- 根号の中に平方数があるときは、外に出して簡単にする。
- 加法・減法では、根号の中が同じものだけをまとめる。
- 乗法では、根号の中をかけてから簡単にする。
- 分母に根号があるときは、有理化する。
- 整数部分は、前後の平方数ではさんで考える。

次に取り組むこと

平方根の標準計算が安定したら、平方根を使った応用問題や図形問題に進みましょう。特に、式の値、近似値、面積とのつながりは高校入試でもよく使われます。