

2021 年度

福島県

数学

解答・解説

KmKm の学習支援サイト

大問 1

(1)

①

$$3 \times (-8) = -24$$

答え：-24

②

$$\frac{1}{2} - \frac{5}{6} = \frac{3}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

答え： $-\frac{1}{3}$

③

$$-8x^3 \div 4x^2 \times (-x) = -2x \times (-x) = 2x^2$$

答え： $2x^2$

④

$$\sqrt{50} + \sqrt{2} = 5\sqrt{2} + \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

答え： $6\sqrt{2}$

(2)

n 角形の内角の和は

$$180^\circ(n - 2)$$

である。したがって、六角形の内角の和は

$$180^\circ(6 - 2) = 180^\circ \times 4 = 720^\circ$$

となる。

答え： 720°

大問 2

(1)

$$3^2 = 9, \quad (2\sqrt{2})^2 = 8$$

であるから、

$$3 > 2\sqrt{2}$$

である。両方に -1 をかけると不等号の向きが逆になるので、

$$-3 < -2\sqrt{2}$$

となる。

答え： $-3 < -2\sqrt{2}$

(2)

徒歩通学と自転車通学の人数の比は

$$5 : 2$$

である。全体の 126 人を $5 + 2 = 7$ 等分したうち、自転車通学は 2 つ分だから、

$$126 \times \frac{2}{7} = 36$$

となる。

答え：36 人

(3)

家から花屋までは 600 m で、毎分 150 m の速さで進むので、花屋に着くまでの時間は

$$600 \div 150 = 4 \text{分}$$

である。

花屋から駅までは 600 m で、毎分 60 m の速さで歩くので、

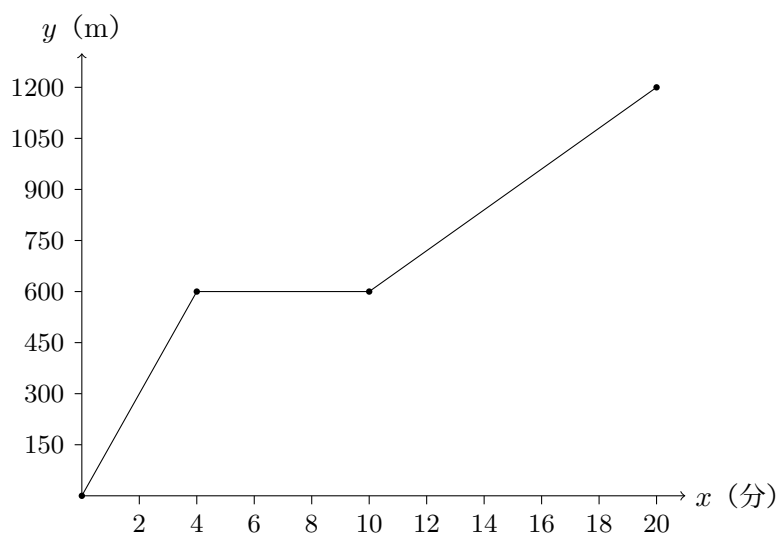
$$600 \div 60 = 10 \text{分}$$

かかる。駅に着くまで全体で 20 分だから、花屋を出たのは

$$20 - 10 = 10 \text{分後}$$

である。

したがって、4 分後から 10 分後までは花屋にいて移動していない。グラフは次のようになる。



答え：上のグラフの通り

(4)

関数 $y = ax^2$ において、 x が 2 から 6 まで増加するときの変化の割合は

$$\frac{36a - 4a}{6 - 2} = \frac{32a}{4} = 8a$$

である。これが -4 だから、

$$8a = -4$$

より、

$$a = -\frac{1}{2}$$

となる。

答え： $-\frac{1}{2}$

(5)

立方体の展開図を組み立てると、面 A と平行になるのは面エである。

答え：エ

大問 3

(1)

箱 P から取り出す数を a 、箱 Q から取り出す数を b とする。取り出し方は全部で

$$4 \times 4 = 16 \text{通り}$$

である。

① コインは A から反時計回りに進むので、点 D に止まるのは

$$2a + b = 8 \quad \text{または} \quad 2a + b = 13$$

のときである。

$2a + b = 8$ となるのは

$$(a, b) = (2, 4), (3, 2)$$

の 2 通り、 $2a + b = 13$ となるのは

$$(a, b) = (4, 5)$$

の 1 通りである。したがって、全部で 3 通りである。

答え：3 通り

② コインは点 A から反時計回りに進み、5 点を 1 周すると再び点 A に戻る。したがって、 $2a + b$ の値を 5 で割った余りによって止まる点が決まる。

各点に止まる場合を列挙すると、次のようになる。

止まる点	$2a + b$ の値	(a, b)
A	5, 10	(1, 3), (3, 4), (4, 2)
B	6, 11	(1, 4), (2, 2), (3, 5), (4, 3)
C	7, 12	(1, 5), (2, 3), (4, 4)
D	8, 13	(2, 4), (3, 2), (4, 5)
E	4, 9	(1, 2), (2, 5), (3, 3)

したがって、場合の数が最も多いのは点 B に止まるときの 4 通りである。取り出し方は全部で

$$4 \times 4 = 16 \text{通り}$$

なので、求める確率は

$$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

となる。

答え： $\frac{1}{4}$

(2)

- ① A 班の最大値は 46 m、範囲は 31 m であるから、

$$\text{最小値} = 46 - 31 = 15$$

となる。

答え：15 m

- ② 各班の記録は 25 個なので、中央値は小さい順に並べたときの 13 番目の値である。

A 班では、25 m 以上 30 m 未満までの累積度数が

$$2 + 5 + 7 = 14$$

なので、13 番目は 25 m 以上 30 m 未満の階級に入る。

B 班では、25 m 以上 30 m 未満までの累積度数が

$$3 + 3 + 5 = 11$$

で、30 m 以上 35 m 未満まででは

$$11 + 8 = 19$$

となる。したがって、13 番目は 30 m 以上 35 m 未満の階級に入る。

よって、中央値が大きいのは B 班である。

答え：B 班

大問 4

十の位の数を x 、一の位の数を y とする。百の位の数は十の位の数より 2 大きいので、

$$x + 2$$

と表せる。

各位の数の和が 18 だから、

$$(x + 2) + x + y = 18$$

より、

$$2x + y = 16 \quad (1)$$

である。

はじめの自然数は

$$100(x + 2) + 10x + y = 110x + y + 200$$

である。

百の位と一の位を入れかえてできる自然数は

$$100y + 10x + (x + 2) = 11x + 100y + 2$$

である。この数は、はじめの自然数より 99 小さいので、

$$11x + 100y + 2 = 110x + y + 200 - 99$$

となる。整理すると、

$$x - y = -1 \quad (2)$$

である。

(1)、(2) を加えると、

$$3x = 15$$

より、

$$x = 5$$

である。これを (2) に代入すると、

$$5 - y = -1$$

より、

$$y = 6$$

となる。したがって、百の位は

$$5 + 2 = 7$$

である。

答え：756

大問 5

$\triangle ABF$ と $\triangle DBG$ において、仮定より

$$AB = DB \quad (1)$$

である。

また、 $\triangle ABC \equiv \triangle DBE$ だから、対応する角は等しいので、

$$\angle BAF = \angle BDG \quad (2)$$

$$\angle ABC = \angle DBE \quad (3)$$

である。

点 F は辺 BE 上、点 G は辺 BC 上にあるから、

$$\angle ABF = \angle ABC - \angle CBE \quad (4)$$

$$\angle DBG = \angle DBE - \angle CBE \quad (5)$$

である。(3)、(4)、(5) より、

$$\angle ABF = \angle DBG \quad (6)$$

となる。

(1)、(2)、(6) より、1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABF \equiv \triangle DBG$$

である。合同な図形の対応する辺は等しいから、

$$AF = DG$$

となる。

大問 6

(1)

点 P は 2 直線

$$y = \frac{1}{2}x + 4, \quad y = -\frac{1}{2}x + 2$$

の交点である。したがって、

$$\frac{1}{2}x + 4 = -\frac{1}{2}x + 2$$

より、

$$x = -2$$

である。これを $y = \frac{1}{2}x + 4$ に代入すると、

$$y = 3$$

となる。

答え： $(-2, 3)$

(2)

① $t = 6$ のとき、

$$Q(0, 6)$$

である。Q を通る水平な直線と ℓ 、 m との交点をそれぞれ R、S とする。

R は ℓ 上にあるから、

$$6 = \frac{1}{2}x + 4$$

より、

$$x = 4$$

なので、

$$R(4, 6)$$

である。

S は m 上にあるから、

$$6 = -\frac{1}{2}x + 2$$

より、

$$x = -8$$

なので、

$$S(-8, 6)$$

である。

したがって、

$$RS = 4 - (-8) = 12$$

また、点 P から直線 RS までの高さは

$$6 - 3 = 3$$

だから、

$$\triangle PRS \text{の面積} = \frac{1}{2} \times 12 \times 3 = 18$$

となる。

答え：18

② 一般に、点 R、S の y 座標はともに t である。

R は ℓ 上にあるので、

$$t = \frac{1}{2}x + 4$$

より、

$$R(2t - 8, t)$$

である。

S は m 上にあるので、

$$t = -\frac{1}{2}x + 2$$

より、

$$S(-2t + 4, t)$$

である。

したがって、

$$RS = (2t - 8) - (-2t + 4) = 4t - 12$$

点 P から RS までの高さは

$$t - 3$$

だから、

$$\triangle PRS \text{の面積} = \frac{1}{2}(4t - 12)(t - 3) = 2(t - 3)^2$$

である。

一方、

$$A(0, 4), \quad B(0, 2), \quad P(-2, 3)$$

なので、

$$\triangle ABP \text{の面積} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

である。

条件より、

$$2(t-3)^2 = 5 \times 2$$

だから、

$$(t-3)^2 = 5$$

$$t = 3 \pm \sqrt{5}$$

となる。 $t > 4$ より、

$$t = 3 + \sqrt{5}$$

である。

答え： $3 + \sqrt{5}$

大問 7

(1)

底面 ABCD は 1 辺 2 cm の正方形なので、対角線 AC は

$$AC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

である。条件より $AC = AE$ だから、

$$AE = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

となる。

答え： $2\sqrt{2} \text{ cm}$

(2)

$\triangle OAC$ は

$$OA = OC = 3 \text{ cm}$$

の二等辺三角形である。O から AC に垂線を下ろし、その足を H とする。二等辺三角形の性質より、

$$AH = CH = \sqrt{2} \text{ cm}$$

である。

$\triangle OAH$ で三平方の定理より、

$$OH = \sqrt{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{7}$$

である。したがって、

$$\triangle OAC \text{ の面積} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{14}$$

となる。

答え： $\sqrt{14} \text{ cm}^2$

(3)

底面 ABCD の中心を H とする。正四角錐なので、OH は底面 ABCD に垂直である。

底面は 1 辺 2 cm の正方形だから、

$$AH = \frac{AC}{2} = \sqrt{2} \text{ cm}$$

である。また、 $OA = 3 \text{ cm}$ なので、直角三角形 OAH で三平方の定理より、

$$OH = \sqrt{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{7} \text{ cm}$$

となる。

次に、点 E の位置を求める。点 E は辺 OC 上にあり、

$$AE = AC = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

である。

$\triangle OAC$ と $\triangle AEC$ において、

$$OA = OC$$

より、

$$\angle OAC = \angle OCA$$

である。また、

$$AE = AC$$

より、

$$\angle AEC = \angle ECA$$

である。点 O、E、C は一直線上にあるので、

$$\angle OCA = \angle ECA$$

となる。したがって、2 組の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle OAC \sim \triangle AEC$$

である。

相似比は

$$OA : AE = 3 : 2\sqrt{2}$$

だから、

$$OC : AC = 3 : 2\sqrt{2}$$

に対応し、

$$EC = \frac{AC \cdot AE}{OA} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{3} = \frac{8}{3} \text{ cm}$$

となる。よって、

$$OE = OC - EC = 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3} \text{ cm}$$

である。

点 E は辺 OC を

$$OE : EC = 1 : 8$$

に内分している。したがって、E から底面 ABCD までの高さは、O から底面 ABCD までの高さの

$$\frac{EC}{OC} = \frac{8}{9}$$

倍であるから、

$$\frac{8}{9}\sqrt{7} \text{ cm}$$

となる。

底面 ABCD の面積は

$$2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$$

なので、求める四角錐 E-ABCD の体積は

$$4 \times \frac{8\sqrt{7}}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{32\sqrt{7}}{27}$$

となる。

答え： $\frac{32\sqrt{7}}{27} \text{ cm}^3$