

2021 年度 宮城県

数学

解答・解説

KmKm の学習支援サイト

第一問

1

$$-14 + 5 = -9$$

答え：-9

2

$$\frac{3}{2} \times (-4) = -6$$

答え：-6

3

$$2a^2b^3 \div ab = 2ab^2$$

$a = 3$, $b = -2$ を代入すると、

$$2ab^2 = 2 \times 3 \times (-2)^2 = 24$$

答え：24

4

$$4a - 5b = 3c$$

より、

$$4a = 5b + 3c$$

したがって、

$$a = \frac{5b + 3c}{4}$$

答え： $a = \frac{5b + 3c}{4}$

5

$$3\sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3} + \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

答え： $4\sqrt{3}$

6

平方差の公式を使うと、

$$x^2 - 25y^2 = (x + 5y)(x - 5y)$$

答え： $(x + 5y)(x - 5y)$

7

ア：0 分以上 60 分未満の階級に 8 人いるが、その中に学習時間が 0 分の人がいる可能性があるため誤り。

イ：最も度数が高い階級は 60 分以上 120 分未満であり、その階級値は、

$$\frac{60 + 120}{2} = 90$$

なので正しい。

ウ：平均値は、

$$\frac{30 \times 8 + 90 \times 13 + 150 \times 11 + 210 \times 6 + 270 \times 2}{40} = \frac{4860}{40} = 121.5$$

なので誤り。

エ：中央値は 60 分以上 120 分未満の階級に入るので誤り。

オ：240 分以上 300 分未満の相対度数は、

$$\frac{2}{40} = 0.05$$

なので正しい。

答え：イ、オ

8

点 D から AC に垂線を下ろし、その足を F とする。

点 D は辺 AB の中点であり、 $DF \parallel BC$ なので、中点連結定理より、点 F は辺 AC の中点である。

$AC = 6 \text{ cm}$ より、

$$AF = FC = 3 \text{ cm}$$

となる。

回転してできる立体は、半径 3 cm、高さ 3 cm の円柱と、半径 3 cm、高さ 3 cm の円錐を合わせたものである。したがって、体積は、

$$3^2\pi \times 3 + \frac{1}{3} \times 3^2\pi \times 3 = 27\pi + 9\pi = 36\pi$$

答え： $36\pi \text{ cm}^3$

第二問

1

(1)

十の位が a 、一の位が b の 2 けたの自然数は、

$$10a + b$$

と表せる。

答え： $10a + b$

(2)

もとの数を $P = 10a + b$ 、十の位と一の位を入れ替えた数を $Q = 10b + a$ とする。

$$P - Q = (10a + b) - (10b + a) = 9(a - b)$$

また、 $P - Q = 63$ なので、

$$9(a - b) = 63$$

$$a - b = 7$$

したがって、

$$a = b + 7$$

である。

$b = 1$ のとき $a = 8$ なので $P = 81$ で、これは奇数である。

$b = 2$ のとき $P = 92$ となり偶数なので条件に合わない。 $b \geq 3$ では $a \geq 10$ となり、十の位の数字にならない。

答え：81

2

(1)

最初は、箱 A に 2 個、箱 B に 2 個、箱 C に 0 個の球が入っている。

1 回まわした後に、箱 B から箱 C へ 1 個移せばよいので、円盤が 3 に止まればよい。1 から 4 までの数字は同様に確からしいから、

$$\frac{1}{4}$$

答え： $\frac{1}{4}$

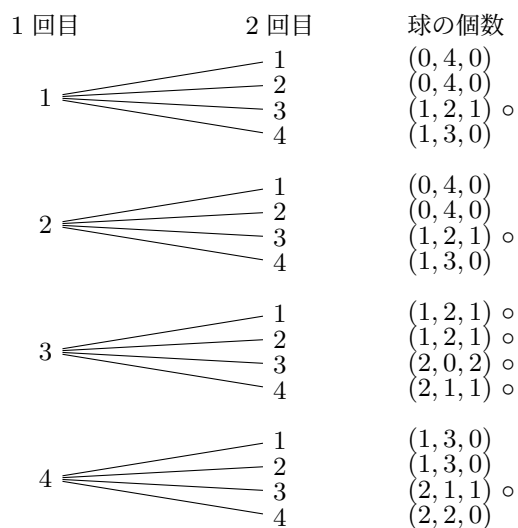
(2)

円盤を 2 回まわしたときの出方は、

$$4 \times 4 = 16$$

通りである。

それぞれの場合を樹形図で整理すると、次のようになる。右端の (A, B, C) は、2 回まわした後に各箱に入っている球の個数を表す。



○が付いた場合では、箱 C に少なくとも 1 個の球が入っている。これは 7 通りなので、

$$\frac{7}{16}$$

答え： $\frac{7}{16}$

3

(1)

点 A は $y = x^2$ 上にあり、 $x = -2$ なので、

$$A(-2, 4)$$

である。点 B は同じ放物線上にあり、 $x = 1$ なので、

$$B(1, 1)$$

である。

直線 AB の傾きは、

$$\frac{1 - 4}{1 - (-2)} = -1$$

答え： -1

(2)

直線 AB を

$$y = -x + n$$

とおく。点 $B(1, 1)$ を通るので、

$$1 = -1 + n$$

より、 $n = 2$ 。したがって、

$$y = -x + 2$$

答え： $y = -x + 2$

(3)

点 C は直線 $y = -x + 2$ 上にあり、 $y = -2$ なので、

$$-2 = -x + 2$$

より、 $x = 4$ 。したがって、

$$C(4, -2)$$

である。

放物線 $y = ax^2$ は点 C を通るので、

$$-2 = 16a$$

よって、

$$a = -\frac{1}{8}$$

答え： $-\frac{1}{8}$

4

(1)

商品 A の箱数を x 箱とすると、商品 B はその半分だから、

$$\frac{1}{2}x$$

箱である。

商品 C は商品 B の 3 倍だから、

$$3 \times \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}x$$

箱である。

答え： $\frac{3}{2}x$ 箱

(2)

商品 A は、1 箱につきドーナツ 2 個、カップケーキ 1 個である。

商品 B は、1 箱につきドーナツ 4 個、カップケーキ 2 個である。

商品 C は、1 箱につきドーナツ 1 個、カップケーキ 2 個である。

商品 A を x 箱とすると、ドーナツの総数は、

$$2x + 4 \cdot \frac{1}{2}x + 1 \cdot \frac{3}{2}x = \frac{11}{2}x$$

個である。これが 176 個なので、

$$\frac{11}{2}x = 176$$

より、 $x = 32$ 。

カップケーキの総数は、

$$x + 2 \cdot \frac{1}{2}x + 2 \cdot \frac{3}{2}x = 5x$$

なので、

$$5 \times 32 = 160$$

答え：160 個

第三問

1

一次関数 $y = ax + b$ では、 a の値が大きいほどグラフの傾きは急になる。
したがって、問題図の選択肢のうち、 $y = x$ より傾きが急なものを選ぶ。

答え：ウ

2

(1)

点 $A(3, 4)$ なので、三平方の定理より、

$$OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

答え：5

(2)

直線 OA は原点と点 $A(3, 4)$ を通るので、

$$y = \frac{4}{3}x$$

である。

直線 ℓ は OA と平行で、点 $B(5, 0)$ を通る。したがって、

$$y = \frac{4}{3}x + n$$

とおくと、

$$0 = \frac{4}{3} \cdot 5 + n$$

より、

$$n = -\frac{20}{3}$$

である。

答え： $y = \frac{4}{3}x - \frac{20}{3}$

(3)

$\triangle ABO$ の面積は、

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10$$

である。問題の条件より、

$$\triangle ABC : \triangle ABO = 1 : 2$$

なので、

$$\triangle ABC = 5$$

点 C を通り、直線 AB と平行な直線を m とし、 m と x 軸との交点を D とする。等積変形より、

$$\triangle ABC = \triangle ABD = 5$$

である。

$BD = t$ とおくと、

$$\frac{1}{2} \times t \times 4 = 5$$

より、

$$t = \frac{5}{2}$$

したがって、

$$D\left(\frac{15}{2}, 0\right)$$

直線 AB の式は、

$$y = -2x + 10$$

なので、これと平行な直線 m は、

$$y = -2x + 15$$

である。

点 C は直線 ℓ と直線 m の交点なので、

$$\frac{4}{3}x - \frac{20}{3} = -2x + 15$$

$$4x - 20 = -6x + 45$$

$$10x = 65$$

$$x = \frac{13}{2}$$

これを $y = -2x + 15$ に代入すると、

$$y = 2$$

したがって、

$$C\left(\frac{13}{2}, 2\right)$$

$$\text{答え} : \left(\frac{13}{2}, 2\right)$$

(4)

点 $A(3, 4)$ を y 軸について対称移動した点を $A'(-3, 4)$ とする。

$AP = A'P$ なので、 $AP + PB$ が最小になるのは、 A', P, B が一直線上に並ぶときである。

直線 $A'B$ の式を求める。点 $A'(-3, 4)$ 、点 $B(5, 0)$ を通るので、傾きは、

$$\frac{0 - 4}{5 - (-3)} = -\frac{1}{2}$$

したがって、

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

である。

点 P はこの直線と y 軸との交点なので、 y 座標は、

$$\frac{5}{2}$$

答え： $\frac{5}{2}$

第四問

1

$\triangle ACD$ と $\triangle ECA$ において、問題図の条件より、

$$\angle ADC = \angle EAC = 90^\circ$$

また、共通な角なので、

$$\angle ACD = \angle ECA$$

である。

したがって、2組の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ACD \sim \triangle ECA$$

(証明終わり)

2

(1)

$\triangle ACD$ は直角三角形で、 $AD = 2$ cm、 $CD = 3$ cm なので、

$$AC = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

である。

第四問 1 より、

$$\triangle ACD \sim \triangle ECA$$

なので、対応する辺の比より、

$$AC : EC = CD : AC$$

$$\sqrt{13} : EC = 3 : \sqrt{13}$$

したがって、

$$EC = \frac{13}{3}$$

である。

よって、

$$DE = EC - CD = \frac{13}{3} - 3 = \frac{4}{3}$$

答え： $\frac{4}{3}$ cm

(2)

$\triangle EHD$ と $\triangle EBC$ において、 $HD \parallel BC$ なので、

$$\angle EHD = \angle EBC, \quad \angle EDH = \angle ECB$$

したがって、

$$\triangle EHD \sim \triangle EBC$$

である。

また、 $BC = 2AD = 4 \text{ cm}$ である。相似な三角形の対応する辺の比より、

$$EC : ED = BC : HD$$

$$\frac{13}{3} : \frac{4}{3} = 4 : HD$$

したがって、

$$HD = \frac{16}{13}$$

よって、 $\triangle EHD$ の面積は、

$$\frac{1}{2} \times \frac{16}{13} \times \frac{4}{3} = \frac{32}{39}$$

$$\text{答え} : \frac{32}{39} \text{ cm}^2$$

(3)

補足：難問

まず、 $\triangle AFH$ と $\triangle DEH$ において、

$$\angle FAH = \angle EDH = 90^\circ$$

また、対頂角より、

$$\angle AHF = \angle DHE$$

である。したがって、

$$\triangle AFH \sim \triangle DEH$$

である。

$AD = 2$ 、第四問 2(2) より $HD = \frac{16}{13}$ なので、

$$AH = 2 - \frac{16}{13} = \frac{10}{13}$$

である。対応する辺の比より、

$$AF : DE = AH : DH$$

$$AF : \frac{4}{3} = \frac{10}{13} : \frac{16}{13}$$

したがって、

$$AF = \frac{5}{6}$$

よって、

$$\triangle AFH = \frac{1}{2} \times \frac{10}{13} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{78}$$

次に、 $\triangle AGH$ と $\triangle CGB$ は相似であり、

$$AH : CB = \frac{10}{13} : 4 = 5 : 26$$

である。

G から AH に垂線を下ろし、その足を I とし、 G から BC に垂線を下ろし、その足を J とする。相似比より、

$$GI : GJ = 5 : 26$$

また、

$$IJ = DC = 3$$

なので、

$$GI = \frac{15}{31}$$

である。

したがって、

$$\triangle AGH = \frac{1}{2} \times \frac{10}{13} \times \frac{15}{31} = \frac{75}{403}$$

$\triangle AFH$ と $\triangle AGH$ は、底辺をそれぞれ FH, GH とすると高さが等しいので、面積比は底辺比に等しい。よって、

$$FH : GH = \frac{25}{78} : \frac{75}{403} = 31 : 18$$

答え：31 : 18