

2022年度

福島県

数学

解答・解説

KmKm の学習支援サイト

大問 1

(1)

①

$$3 - 9 = -6$$

答え：-6

②

$$\frac{7}{6} \times (-12) = -14$$

答え：-14

③

$$5(a - 2b) - 2(2a - 3b) = 5a - 10b - 4a + 6b = a - 4b$$

答え： $a - 4b$

④

$$\sqrt{12} \times \sqrt{45} = 2\sqrt{3} \times 3\sqrt{5} = 6\sqrt{15}$$

答え： $6\sqrt{15}$

(2)

おうぎ形の面積は

$$\text{半径} \times \text{半径} \times \pi \times \frac{\text{中心角}}{360}$$

である。半径が 5 cm、中心角が 72° だから、

$$5 \times 5 \times \pi \times \frac{72}{360} = 25\pi \times \frac{1}{5} = 5\pi$$

となる。

答え： $5\pi \text{ cm}^2$

大問 2

(1)

原稿用紙 16 枚の重さは $16a$ g、封筒の重さは b g である。全体の重さが 250 g 以上なので、

$$16a + b \geq 250$$

となる。

答え： $16a + b \geq 250$

(2)

直線 $y = 2x - 3$ は、傾きが正なので右上がりである。また、切片は -3 なので、 y 軸と原点より下で交わる。

この条件に合うグラフはウである。

答え：ウ

(3)

$$(x - 2)^2 - 6 = 0$$

より、

$$(x - 2)^2 = 6$$

だから、

$$x - 2 = \pm\sqrt{6}$$

となる。したがって、

$$x = 2 \pm \sqrt{6}$$

である。

答え： $x = 2 \pm \sqrt{6}$

(4)

データを小さい順に並べると、

4, 7, 9, 10, 11, 13, 18, 18, 20, 25

となる。データは 10 個なので、中央値は 5 番目と 6 番目の平均である。

$$\frac{11 + 13}{2} = 12$$

答え：12 分

(5)

$\triangle ABC$ は正三角形なので、

$$\angle BAC = \angle ABC = \angle BCA = 60^\circ$$

である。

問題図より、直線 AB と直線 ℓ のなす角が 26° だから、 AB と直線 m のなす角も 26° である。よって、 BC と直線 m のなす角は

$$60^\circ - 26^\circ = 34^\circ$$

となる。

また、 $\angle BCA = 60^\circ$ だから、三角形と直線 m でできる角は

$$34^\circ + 60^\circ = 94^\circ$$

である。求める角 x はその隣の角なので、

$$x = 180^\circ - 94^\circ = 86^\circ$$

となる。

答え： 86°

大問 3

(1)

袋 A からは 1, 3, 5、袋 B からは -2, 2、袋 C からは 2, 4, 6 のいずれかを取り出す。したがって、取り出し方は全部で

$$3 \times 2 \times 3 = 18 \text{通り}$$

である。

① $b = 2$ のときは $ab + c$ はすべて正になるので不適である。 $b = -2$ のとき、

$$ab = -2, -6, -10$$

となる。

$ab + c = -4$ となるのは、

$$-6 + 2 = -4, \quad -10 + 6 = -4$$

の 2 通りである。

答え：2 通り

② $b = 2$ のときは、9 通りすべてで $ab + c$ は正である。

$b = -2$ のとき、 $ab + c$ が 0 または負になるのは 7 通りなので、正になるのは

$$9 + (9 - 7) = 11$$

通りである。したがって、求める確率は

$$\frac{11}{18}$$

となる。

答え： $\frac{11}{18}$

(2)

① 各段の左端は

$$1^2, 2^2, 3^2, \dots$$

となり、 n 段目には n 個の数が並ぶ。したがって、 n 段目の右端は

$$n^2 + n - 1$$

である。よって、8 段目の右端は

$$8^2 + 8 - 1 = 71$$

となる。

答え：71

② n 段目の右端の数を a とすると、

$$a = n^2 + n - 1$$

である。また、 $(n - 1)$ 段目の右端の数を b とすると、

$$b = (n - 1)^2 + (n - 1) - 1 = n^2 - n - 1$$

である。

したがって、

$$a - b = (n^2 + n - 1) - (n^2 - n - 1) = 2n$$

となる。 n は整数なので $2n$ は偶数である。よって、正しいのはアである。

答え：ア

大問 4

そうたさんが勝った回数を x 回、ゆうなさんが勝った回数を y 回とする。あいこは 8 回で、全部で 30 回なので、

$$x + y + 8 = 30$$

より、

$$x + y = 22 \quad (1)$$

である。

そうたさんは、勝ったときにメダル A を 2 枚、あいこのときにメダル A と B を 1 枚ずつ、負けたときにメダル B を 1 枚もらう。したがって、そうたさんがもらったメダル A は

$$2x + 8 \text{ 枚}$$

メダル B は

$$y + 8 \text{ 枚}$$

である。

メダル A は 1 枚 5 g、メダル B は 1 枚 4 g で、合計 232 g だから、

$$5(2x + 8) + 4(y + 8) = 232$$

となる。整理すると、

$$10x + 4y = 160$$

$$5x + 2y = 80 \quad (2)$$

である。

(1) を 2 倍すると、

$$2x + 2y = 44$$

である。これを (2) からひくと、

$$3x = 36$$

より、

$$x = 12$$

となる。これを (1) に代入すると、

$$12 + y = 22$$

より、

$$y = 10$$

となる。

答え：そうたさん：12 回、ゆうなさん：10 回

大問 5

$\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ において、共通な辺なので、

$$AD = AD \quad (1)$$

である。

AD は $\angle BAC$ の二等分線だから、

$$\angle BAD = \angle CAD \quad (2)$$

である。

$AC \parallel BE$ より、錯角が等しいので、

$$\angle CAD = \angle BED \quad (3)$$

である。(2)、(3) より、

$$\angle BAD = \angle BED \quad (4)$$

となる。

したがって、 $\triangle BAE$ は底角が等しい二等辺三角形なので、

$$BA = BE \quad (5)$$

である。

仮定より、

$$AC = BE \quad (6)$$

であるから、(5)、(6) より、

$$BA = AC \quad (7)$$

となる。

(1)、(2)、(7) より、2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$$

である。

大問 6

(1)

点 A は $y = \frac{1}{2}x^2$ 上にあり、 $x = -2$ だから、

$$y = \frac{1}{2}(-2)^2 = 2$$

である。したがって、

$$A(-2, 2)$$

となる。

点 C は A と x 軸について対称なので、

$$C(-2, -2)$$

である。

答え： $(-2, -2)$

(2)

点 B は直線 $\ell: y = x + 4$ 上にあり、 $x = 4$ だから、

$$B(4, 8)$$

である。点 C は

$$C(-2, -2)$$

である。

直線 BC の傾きは

$$\frac{8 - (-2)}{4 - (-2)} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

である。したがって、直線 BC の式を

$$y = \frac{5}{3}x + b$$

とおく。点 B を代入すると、

$$8 = \frac{5}{3} \cdot 4 + b$$

より、

$$b = \frac{4}{3}$$

となる。

答え： $y = \frac{5}{3}x + \frac{4}{3}$

(3)

点 P は $y = \frac{1}{2}x^2$ 上にあり、 $x = t$ だから、

$$P\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$$

である。

点 P を通り、直線 BC に平行な直線を引き、その直線と $x = -2$ の直線との交点を D とする。すると、 $\triangle PBC$ と $\triangle PBD$ は、底辺を PB と見たとき高さが等しいので、面積も等しい。

したがって、

$$\triangle PBD : \triangle ACB = 1 : 4$$

となればよい。三角形 PBD と三角形 ACB は高さが等しいので、

$$CD : AC = 1 : 4$$

である。 $AC = 4$ だから、

$$CD = 1$$

となり、

$$D(-2, -3)$$

である。

直線 PD は BC に平行なので、傾きは $\frac{5}{3}$ である。よって、直線 PD の式は

$$y = \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$$

となる。

点 P はこの直線と放物線の両方にあるから、

$$\frac{1}{2}t^2 = \frac{5}{3}t + \frac{1}{3}$$

である。両辺を 6 倍すると、

$$3t^2 - 10t - 2 = 0$$

となる。解の公式より、

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 24}}{6} = \frac{10 \pm 2\sqrt{31}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{31}}{3}$$

である。

$0 < t < 4$ より、

$$t = \frac{5 + \sqrt{31}}{3}$$

となる。

答え： $\frac{5+\sqrt{31}}{3}$

大問 7

(1)

底面の $\triangle DEF$ は、 $DE = EF = 6 \text{ cm}$ の直角二等辺三角形なので、対応する上面の $\triangle ABC$ も

$$AB = BC = 6 \text{ cm}$$

の直角二等辺三角形である。

三平方の定理より、

$$AC = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

である。点 M は辺 AC の中点なので、

$$AM = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

である。

$\triangle ABC$ は二等辺三角形だから、 BM は辺 AC に垂直である。よって、 $\triangle ABM$ で三平方の定理より、

$$BM = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{36 - 18} = 3\sqrt{2}$$

となる。

答え： $3\sqrt{2} \text{ cm}$

(2)

① $\triangle ABP$ と $\triangle CBP$ において、

$$AB = CB = 6$$

である。また、側面は長方形なので、

$$\angle ABP = \angle CBP = 90^\circ$$

であり、BP は共通である。

したがって、2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABP \equiv \triangle CBP$$

となる。よって、

$$AP = CP$$

であり、 $\triangle APC$ は二等辺三角形である。したがって、

$$PM \perp AC$$

である。

$\triangle APC$ の面積は 30 cm^2 、 $AC = 6\sqrt{2} \text{ cm}$ だから、

$$30 = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot PM$$

より、

$$PM = 5\sqrt{2}$$

となる。

答え： $5\sqrt{2} \text{ cm}$

② 点 B から平面 APC に垂線を下ろし、その足を Q とする。求める距離は BQ である。

まず、 $\triangle BMP$ において、 $\angle BMP = 90^\circ$ であり、

$$BM = 3\sqrt{2}, \quad PM = 5\sqrt{2}$$

だから、三平方の定理より、

$$BP = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{50 - 18} = 4\sqrt{2}$$

となる。

四面体 B-APC の体積を、2 通りの底面の取り方で表す。

底面を $\triangle APC$ とすると、面積は 30 cm^2 、高さは BQ だから、

$$V = 30 \times BQ \times \frac{1}{3} = 10BQ \quad (1)$$

である。

一方、底面を $\triangle ABC$ とすると、

$$\triangle ABC \text{ の面積} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18 \text{ cm}^2$$

である。また、辺 BE は平面 ABC に垂直で、点 P は辺 BE 上にあるので、このときの高さは $BP = 4\sqrt{2} \text{ cm}$ である。したがって、

$$V = 18 \times 4\sqrt{2} \times \frac{1}{3} = 24\sqrt{2} \quad (2)$$

となる。

(1)、(2) は同じ四面体 B-APC の体積を表しているから、

$$10BQ = 24\sqrt{2}$$

より、

$$BQ = \frac{12\sqrt{2}}{5}$$

となる。

答え： $\frac{12\sqrt{2}}{5}$ cm