

2022 年度

北海道

数学

解答・解説

KmKm の学習支援サイト

大問 1

問 1

(1) 与式を計算すると

$$-32$$

答え：-32

(2) 与式を計算すると

$$25 - 3 = 22$$

答え：22

(3) 与式を計算すると

$$4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

答え： $6\sqrt{5}$

問 2

$a = 7$, $b = -3$ を代入する。

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab &= 7^2 + 2 \times 7 \times (-3) \\ &= 49 - 42 = 7 \end{aligned}$$

答え：7

問 3

点 A は x 軸上にあるので、点 A の y 座標は 0 である。

$$y = -2x + 8$$

に $y = 0$ を代入すると、

$$0 = -2x + 8$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

したがって、点 A の座標は

$$(4, 0)$$

である。

答え：(4, 0)

問 4

$$3x - 2y = 5 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$-x + 4y = 5 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①を2倍すると、

$$6x - 4y = 10$$

これに②を加えると、

$$6x - 4y + (-x + 4y) = 10 + 5$$

$$5x = 15$$

$$x = 3$$

②に $x = 3$ を代入すると、

$$-3 + 4y = 5$$

$$4y = 8$$

$$y = 2$$

答え： $x = 3, y = 2$

問 5

飛行機の機内に持ち込める荷物の重さを x kg とする。荷物の重さは 10 kg 以下なので、

$$x \leq 10$$

と表すことができる。

答え： $x \leq 10$

問 6

点 P は、線分 EC の垂直二等分線を作図して求める。

線分 EC の垂直二等分線上にある点は、点 E と点 C からの距離が等しい。したがって、作図に必要な条件を満たす点 P を求めるには、線分 EC の垂直二等分線を作図すればよい。

答え：線分 EC の垂直二等分線を作図する

大問 2

問 1

箱ひげ図では、左から順に最小値、第 1 四分位数、中央値、第 3 四分位数、最大値を読み取る。

(1) 図より、B 組の第 3 四分位数は

8.6 秒

である。

答え：8.6 秒

(2) 選択肢を 1 つずつ確認する。

アについて、A 組と B 組の範囲を比べると、

$$A \text{ 組の範囲} = 10.3 - 6.3 = 4.0 \text{ 秒}$$

$$B \text{ 組の範囲} = 10.5 - 6.5 = 4.0 \text{ 秒}$$

となる。したがって、A 組と B 組の範囲は同じである。

イについて、四分位範囲を比べると、

$$A \text{ 組の四分位範囲} = 8.7 - 7.3 = 1.4 \text{ 秒}$$

$$B \text{ 組の四分位範囲} = 8.6 - 7.4 = 1.2 \text{ 秒}$$

となるので、四分位範囲は A 組の方が大きい。

ウについて、平均値は箱ひげ図だけでは読み取れない。

エについて、最大値は、A 組が 10.3 秒、B 組が 10.5 秒なので、B 組の方が大きい。

したがって、正しい選択肢はイである。

答え：イ

問 2

先生の会話から、平均値は

7.5 秒

である。

また、箱ひげ図から、中央値は

$$A \text{ 組} = 7.6 \text{ 秒}, \quad B \text{ 組} = 7.4 \text{ 秒}$$

である。

B 組は中央値が 7.4 秒で、平均値 7.5 秒より小さい。そのため、B 組では平均値より速い人が少なくとも 8 人いる。

一方、A 組は中央値が 7.6 秒で、平均値 7.5 秒より大きい。そのため、A 組では平均値より速い人は多くても 7 人である。

したがって、7.5 秒より速い人は、B 組の方が多い。

答え：㉞ 8、㉟ 7、㊱ B 組

大問 3

問 1

点 A は

$$y = ax^2$$

上にある。点 A の座標は $(2, 12)$ なので、

$$12 = a \times 2^2$$

$$12 = 4a$$

$$a = 3$$

答え：3

問 2

問題文より、 $\angle AOB = 90^\circ$ である。また、対称性から

$$OA = OB$$

なので、 $\triangle OAB$ は直角二等辺三角形である。

さらに、 $\angle AOB = 90^\circ$ のとき、点 C を線分 AB と y 軸の交点とすると、 $\angle COA = 45^\circ$ である。 $\angle ACO = 90^\circ$ なので、

$$\angle OAC = 180^\circ - (90^\circ + 45^\circ) = 45^\circ$$

となる。したがって、 $\triangle OAC$ も直角二等辺三角形である。

(1) まず、 $a = 1$ のときは表より $t = 1$ である。

次に、 $a = 2$ のときを考える。点 A は $y = 2x^2$ 上にあり、 $x = t$ なので、

$$A(t, 2t^2)$$

である。

$\triangle OAC$ は直角二等辺三角形なので、

$$CA = CO$$

である。ここで、

$$CA = t, \quad CO = 2t^2$$

だから、

$$t = 2t^2$$

$t > 0$ より、両辺を t で割ると、

$$1 = 2t$$

$$t = \frac{1}{2}$$

したがって、 $a = 2$ のとき、表の X に当てはまる数は

$$\frac{1}{2}$$

である。

また、 $a = 1$ のとき $a \times t = 1 \times 1 = 1$ 、 $a = 2$ のとき $a \times t = 2 \times \frac{1}{2} = 1$ となる。したがって、一定になるのは a と t の積であり、一定な値は 1 である。

答え： $X = \frac{1}{2}$, $Y = \text{ウ (積)}$, $Z = 1$

(2) 一般に、点 A は $y = ax^2$ 上にあり、 $x = t$ なので、

$$A(t, at^2)$$

である。

点 C を線分 AB と y 軸の交点とすると、 $\triangle OAC$ は直角二等辺三角形である。したがって、

$$CA = CO$$

である。ここで、

$$CA = t, \quad CO = at^2$$

なので、

$$t = at^2$$

$t > 0$ より、両辺を t で割ると、

$$1 = at$$

となる。

よって、 a と t の積は常に一定であり、その値は 1 である。

大問 4

問 1

$$\angle BAC = 40^\circ$$

で、 $\angle ACB = 90^\circ$ だから、

$$\angle CBA = 180^\circ - (90^\circ + 40^\circ) = 50^\circ$$

である。

BD は $\angle ABC$ の二等分線なので、

$$\angle DBA = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$$

である。

したがって、 $\triangle ABD$ において、

$$\angle ADB = 180^\circ - (40^\circ + 25^\circ) = 115^\circ$$

答え：115°

問 2

(1) 4 点 B, C, D, E が 1 つの円周上にあることを示すには、円周角の定理の逆を用いる。

点 D、E は直線 BC について同じ側にあるので、

$$\angle BEC = \angle BDC$$

を示せばよい。

そのためには、 $\angle BEC$ を含む三角形と、 $\angle BDC$ を含む三角形が相似であることを示す。相似な三角形の対応する角は等しいので、

$$\angle BEC = \angle BDC$$

を導くことができる。

したがって、 $\triangle BFE$ と $\triangle BCD$ が相似であることを示せばよい。

(2) $\triangle BFE$ と $\triangle BCD$ において、仮定より、BD は $\angle ABC$ の二等分線なので、

$$\angle EBF = \angle DBC \quad \dots \textcircled{1}$$

である。

また、 $\triangle BCE$ は $BC = BE$ の二等辺三角形であり、線分 BF は頂角の二等分線である。二等辺三角形では、頂角の二等分線は底辺に垂直であるから、

$$\angle BFE = 90^\circ$$

である。

一方、 $\angle BCD = 90^\circ$ なので、

$$\angle BFE = \angle BCD \quad \dots \textcircled{2}$$

である。

①、②より、対応する 2 組の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle BFE \sim \triangle BCD$$

である。

よって、対応する角は等しいので、

$$\angle BEF = \angle BDC$$

となる。点 E、F、C は一直線上にあるため、

$$\angle BEC = \angle BEF$$

である。したがって、

$$\angle BEC = \angle BDC$$

である。

点 D、E は直線 BC について同じ側にあるので、円周角の定理の逆より、4 点 B, C, D, E は 1 つの円周上にある。

大問 5

問 1

- (1) $OA = 4$ cm、 $OC = 4\sqrt{2}$ cm である。 $\triangle OAC$ は直角三角形なので、三平方の定理より、

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{4^2 + (4\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{16 + 32} \\ &= \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

答え： $4\sqrt{3}$ cm

- (2) $\triangle OBD$ と $\triangle OCA$ において、

$$\angle BOD = \angle COA = 90^\circ \quad \dots \textcircled{1}$$

また、図より、

$$\angle OBD = \angle OCA \quad \dots \textcircled{2}$$

である。

- ①、②より、2組の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle OBD \sim \triangle OCA$$

である。したがって、

$$OD : OB = OA : OC \quad \dots \textcircled{3}$$

である。

また、 $OB = AC$ であり、(1) より

$$AC = 4\sqrt{3}$$

なので、

$$OB = 4\sqrt{3}$$

である。

- ③より、

$$OD : 4\sqrt{3} = 4 : 4\sqrt{2}$$

したがって、

$$4\sqrt{2}OD = 16\sqrt{3}$$

$$OD = \frac{16\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = 2\sqrt{6}$$

である。

$\triangle OBD$ は直角三角形なので、三平方の定理より、

$$\begin{aligned} BD &= \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{6})^2} \\ &= \sqrt{48 + 24} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

である。

長方形 $ODBE$ の対角線 OE, BD は、それぞれの中点で交わる。その交点を H とすると、

$$BH = \frac{1}{2}BD = 3\sqrt{2}$$

である。

また、

$$AH = AB - BH = 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

である。したがって、 $\triangle OAH$ の面積は、

$$\frac{1}{2} \times OA \times AH = \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

である。

答え： $2\sqrt{2} \text{ cm}^2$

問 2

(1)

$$\sqrt{102n}$$

が $a\sqrt{b}$ の形で表せるのは、 $102n$ が整数の 2 乗を因数にもつときである。

102 を素因数分解すると、

$$102 = 2 \times 3 \times 17$$

である。 17 は根号の中に必ず残るので、 n が 2 または 3 の素因数をもてば、根号の中に 2 乗の因数を作ることができる。

n は 2 つのさいころの出た目の和なので、

$$2 \leq n \leq 12$$

である。この範囲で、 2 または 3 の素因数をもつ数は、

$$2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12$$

である。

答え： $n = 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12$

(2) $a\sqrt{b}$ の形で表せない場合を考える。(1) の逆を考えればよいので、該当する n は、

$$1, 5, 7, 11$$

である。ただし、 n は 2 つのさいころの出た目の和なので、 $n = 1$ は起こらない。それぞれの場合の目の出方を数える。

$$n = 5 : (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2) \quad 4\text{通り}$$

$$n = 7 : (1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3) \quad 6\text{通り}$$

$$n = 11 : (5, 6), (6, 5) \quad 2\text{通り}$$

したがって、 $a\sqrt{b}$ の形で表せない出方は

$$4 + 6 + 2 = 12\text{通り}$$

である。

2つのさいころの目の出方は全部で

$$6 \times 6 = 36 \text{通り}$$

なので、 $a\sqrt{b}$ の形で表せる出方は

$$36 - 12 = 24 \text{通り}$$

である。

よって、求める確率は

$$\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

である。

答え： $\frac{2}{3}$