

2022年度 山形県

数学

解答・解説

KmKm の学習支援サイト

大問 1

1 (1)

$$-7 + 2 - 1 = -5 - 1 = -6$$

答え：-6

1 (2)

$$\begin{aligned} -\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{2} &= -\frac{5}{8} + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{5}{8} + \frac{4}{8} \\ &= -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

答え： $-\frac{1}{8}$

1 (3)

$$(-6x^2y) \div (-2xy) + 8xy \div (-2xy) = 3x - 4$$

答え： $3x - 4$

1 (4)

同類項をまとめると、

$$4 - 4\sqrt{6} + 6 + 2\sqrt{6} = 10 - 2\sqrt{6}$$

となる。

答え： $10 - 2\sqrt{6}$

2

式を整理すると、

$$\begin{aligned} 3x^2 - 6x + x - 2 &= x - 1 \\ 3x^2 - 6x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

となる。解の公式より、

$$\begin{aligned} x &= \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{48}}{6} \\ &= \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{6} \\ &= \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

答え： $x = \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$

3

1 回目と 2 回目にとったカードを順に表すと、取り出し方は

$$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)$$

の 10 通りである。

このうち、大きい数を小さい数で割った余りが 1 になるのは、

$$(2, 3), (2, 5), (3, 4), (4, 5)$$

の 4 通りである。したがって、

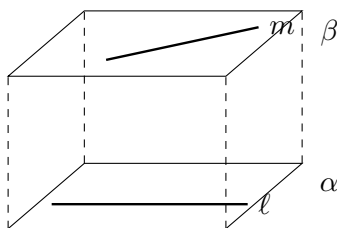
$$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

である。

答え： $\frac{2}{5}$

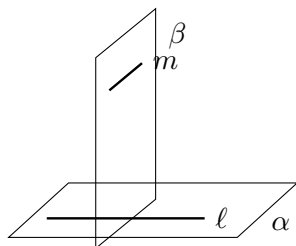
4

アは誤りである。平面 α と平面 β が平行でも、それぞれの平面上にある直線 ℓ , m が平行とは限らない。反例の 1 つを図で表すと、次のようになる。



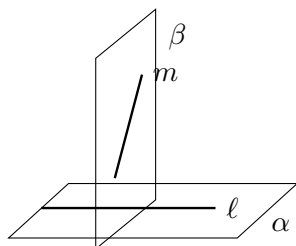
この図では、平面 $\alpha // \beta$ であるが、 ℓ と m は平行ではない。

イも誤りである。2 直線 ℓ , m が平行でも、それぞれを含む 2 つの平面が平行とは限らない。反例の 1 つを図で表すと、次のようになる。



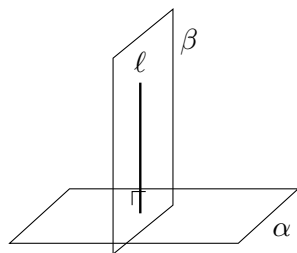
この図では、 $\ell // m$ であるが、平面 α と平面 β は平行ではない。

ウも誤りである。2 つの平面が垂直でも、それぞれの平面上にある直線が垂直とは限らない。反例の 1 つを図で表すと、次のようになる。



この図では、平面 $\alpha \perp \beta$ であるが、 l と m は垂直ではない。

エは正しい。直線 l が平面 α に垂直で、直線 l を含む平面を β とすると、平面 α と平面 β は垂直になる。その関係を図で表すと、次のようになる。



この図では、 $l \perp \alpha$ で、 l は平面 β 上にあるので、平面 $\alpha \perp \beta$ である。

答え：エ

5

昨年の得点について、最も度数が大きいのは 1 点なので、最頻値は 1 点である。

試合数は 42 試合であるから、中央値は、小さい順に並べたときの 21 番目と 22 番目の得点の平均である。21 番目と 22 番目はいずれも 1 点なので、

$$\frac{1+1}{2} = 1$$

より、中央値は 1 点である。

また、昨年の 1 点以上の試合数は

$$15 + 8 + 4 + 2 + 1 = 30$$

なので、その割合は

$$\frac{30}{42} = \frac{5}{7}$$

である。

今年の 1 点以上の試合数の割合と比べると、

$$\frac{150}{210} > \frac{147}{210}$$

となる。したがって、正しい記述はウである。

答え：ウ

大問2

1 (1)

関数は

$$y = \frac{1}{2}x^2$$

で、 x が -4 から 0 まで増加する。

x の増加量は

$$0 - (-4) = 4$$

である。また、

$$x = -4 \text{ のとき } y = 8, \quad x = 0 \text{ のとき } y = 0$$

なので、 y の増加量は

$$0 - 8 = -8$$

である。したがって、変化の割合は

$$\frac{-8}{4} = -2$$

となる。

答え： -2

1 (2)

点 A は

$$y = \frac{1}{2}x^2$$

上にあり、 $x = 2$ なので、

$$y = \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2$$

より、

$$A(2, 2)$$

である。

反比例の式を

$$y = \frac{k}{x}$$

とおく。点 A を通るから、

$$2 = \frac{k}{2}$$

より、

$$k = 4$$

となる。したがって、反比例の式は

$$y = \frac{4}{x}$$

である。

点 B では x, y がともに負の整数である。候補は

$$(-1, -4), \quad (-2, -2), \quad (-4, -1)$$

である。これらを

$$y = ax^2$$

に代入すると、 a が整数になるのは

$$(-1, -4)$$

のときだけである。このとき、

$$-4 = a \cdot (-1)^2$$

より、

$$a = -4$$

となる。

答え：-4

2

直線 AP と直線 ℓ は垂直なので、点 A を通り直線 ℓ に垂直な直線を作図する。

また、点 B を点 P を中心として回転移動させると点 C に重なるので、

$$PB = PC$$

である。したがって、点 P は線分 BC の垂直二等分線上にある。

よって、線分 BC の垂直二等分線を作図し、先に作図した垂線との交点を P とする。

答え：上の作図の通り

3 (1)

方程式の場合

A 地区の面積を $x \text{ km}^2$ とする。町全体の面積は 630 km^2 なので、B 地区の面積は

$$630 - x$$

である。

A 地区の森林面積は

$$\frac{70}{100}x$$

B 地区の森林面積は

$$\frac{90}{100}(630 - x)$$

である。町全体の森林面積が 519 km^2 なので、

$$\frac{70}{100}x + \frac{90}{100}(630 - x) = 519$$

となる。

$$\text{答え：} \frac{70}{100}x + \frac{90}{100}(630 - x) = 519$$

連立方程式の場合

A 地区の面積を $x \text{ km}^2$ 、B 地区の面積を $y \text{ km}^2$ とする。すると、

$$\begin{cases} x + y = 630 \\ \frac{70}{100}x + \frac{90}{100}y = 519 \end{cases}$$

となる。

$$\text{答え：}\begin{cases} x + y = 630 \\ \frac{70}{100}x + \frac{90}{100}y = 519 \end{cases}$$

3 (2)

方程式を用いると、

$$\begin{aligned} \frac{70}{100}x + \frac{90}{100}(630 - x) &= 519 \\ 7x + 9(630 - x) &= 5190 \\ 7x + 5670 - 9x &= 5190 \\ -2x &= -480 \\ x &= 240 \end{aligned}$$

となる。

A 地区の森林面積は A 地区の面積の 70% なので、

$$240 \cdot \frac{70}{100} = 168$$

である。

答え：168 km²

4

L 字に並んだ 3 つの自然数のうち、最も小さい数を n とする。残りの 2 数は

$$n + 1, \quad n + 6$$

と表せる。

したがって、3 数の和は

$$\begin{aligned} n + (n + 1) + (n + 6) &= 3n + 7 \\ &= 3(n + 2) + 1 \end{aligned}$$

となる。

$n + 2$ は整数であるから、 $3(n + 2)$ は 3 の倍数である。したがって、

$$3(n + 2) + 1$$

は 3 の倍数に 1 を加えた数である。

大問3

1 (1)

点 P は点 A を出発し、毎秒 1 cm の速さで辺 AE 上、線分 EB 上、辺 BC 上を点 C まで動く。

$x = 3$ のとき、点 P は辺 AE 上にある。このとき、

$$PE = 4 - 3 = 1 \text{ cm}$$

である。

四角すい $PEFGH$ の底面 $EFGH$ は、辺の長さが 3 cm と 5 cm の長方形なので、底面積は

$$3 \cdot 5 = 15 \text{ cm}^2$$

である。したがって、体積は

$$\frac{1}{3} \cdot 15 \cdot 1 = 5$$

となる。

答え：5 cm³

1 (2)

まず、

$$EB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ cm}$$

である。したがって、点 P は

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 4 \text{ のとき辺 } AE \text{ 上,} \\ 4 \leq x \leq 9 \text{ のとき線分 } EB \text{ 上,} \\ 9 \leq x \leq 14 \text{ のとき辺 } BC \text{ 上} \end{aligned}$$

にある。

$0 \leq x \leq 4$ のとき

四角すいの高さは

$$PE = 4 - x$$

なので、

$$y = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 5 \cdot (4 - x) = -5x + 20$$

となる。したがって、

$$\text{ア} = -5x + 20$$

である。

$4 \leq x \leq 9$ のとき

点 P から平面 $EFGH$ に垂線を下ろし、その足を H とする。このとき、四角すい $PEFGH$ の高さは PH である。

$$EP = x - 4, \quad EB = 5$$

であり、

$$\triangle EPH \sim \triangle EBF$$

なので、

$$EP : EB = PH : BF$$

より、

$$(x - 4) : 5 = PH : 4$$

となる。したがって、

$$PH = \frac{4}{5}(x - 4)$$

である。

よって、

$$y = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5}(x - 4) = 4x - 16$$

となる。したがって、

$$ウ = 4x - 16$$

である。

また、点 P が点 B に着くのは

$$AE + EB = 4 + 5 = 9$$

秒後であるから、

$$イ = 9$$

である。

$9 \leq x \leq 14$ のとき

点 P は辺 BC 上にあり、四角すいの高さは常に 4 cm である。したがって、

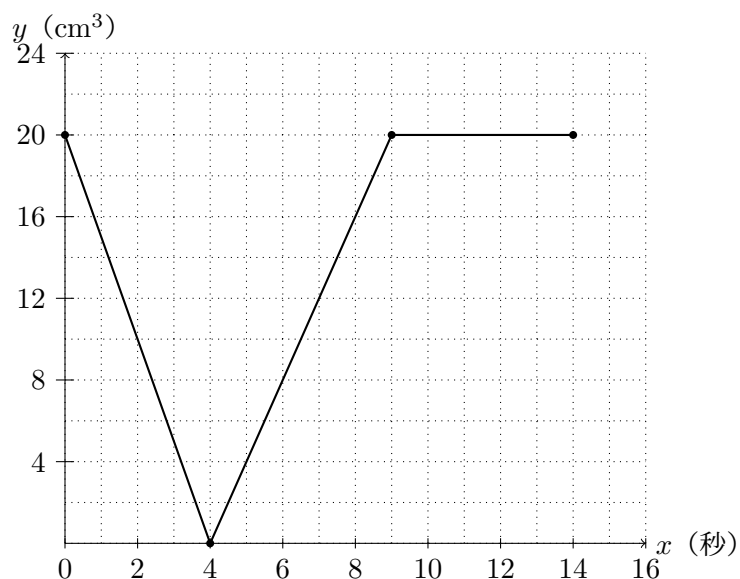
$$y = 20$$

となる。

以上より、

$$ア = -5x + 20, \quad イ = 9, \quad ウ = 4x - 16$$

である。グラフは次の通りである。



答え：ア： $-5x + 20$ 、イ：9、ウ： $4x - 16$ 、グラフは上の通り

2

点 P が点 B に着くまでにかかる時間は、

$$AE + EB = 4 + 5 = 9$$

より 9 秒である。

点 P が点 B を通過した後、点 P が点 C に着くまでの途中の位置を考える。三角形 $PF G$ の面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10 \text{ cm}^2$$

である。

問題の条件から、

$$\triangle PFG : \triangle PEF = 4 : 3$$

なので、

$$10 : \triangle PEF = 4 : 3$$

より、

$$\triangle PEF = \frac{15}{2} \text{ cm}^2$$

となる。

辺 EF と面 $BFGC$ は垂直であり、 PF は面 $BFGC$ 上にあるから、

$$EF \perp PF$$

である。したがって、三角形 PEF で底辺を EF とすると、高さは PF である。

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot PF = \frac{15}{2}$$

より、

$$PF = 5$$

となる。

三角形 PBF で三平方の定理を用いると、

$$BP = \sqrt{PF^2 - BF^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

である。

点 P は毎秒 1 cm で動くので、点 B からこの位置まで 3 秒かかる。したがって、

$$9 + 3 = 12$$

である。

答え：12 秒

大問 4

1

$\triangle ABC$ と $\triangle AHE$ において考える。

線分 AB は円 O の直径なので、半円の弧に対する円周角は直角である。したがって、

$$\angle ACB = \angle AEH = 90^\circ \quad (1)$$

また、 $OC \parallel AD$ より錯角が等しいので、

$$\angle HAE = \angle OCA \quad (2)$$

$\triangle OCA$ は

$$OC = OA$$

である二等辺三角形なので、

$$\angle BAC = \angle OCA \quad (3)$$

(2)、(3) より、

$$\angle HAE = \angle BAC \quad (4)$$

(1)、(4) より、2 組の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABC \sim \triangle AHE$$

である。

2 (1)

まず、 $\triangle AHE$ と $\triangle BCJ$ において、弧 CE に対する円周角は等しいので、

$$\angle EAH = \angle CBJ$$

である。

また、 $OC \parallel AD$ より、

$$\angle AEH = \angle OJB = 90^\circ$$

であり、

$$\angle BJC = 90^\circ$$

だから、

$$\triangle AHE \sim \triangle BCJ$$

である。

大問 4 の 1 より、

$$\triangle ABC \sim \triangle AHE$$

なので、

$$\triangle ABC \sim \triangle BCJ$$

となる。対応する辺の比から、

$$AB : BC = BC : CJ$$

である。 $AB = 9$ cm、 $BC = 3$ cm より、

$$9 : 3 = 3 : CJ$$

なので、

$$CJ = 1 \text{ cm}$$

となる。

次に、 $\triangle OBJ$ と $\triangle ABE$ は相似である。 AB は直径で 9 cm なので、

$$OB : BA = 4.5 : 9 = 1 : 2$$

である。よって、

$$BJ : BE = 1 : 2$$

となり、点 J は線分 BE の中点である。

したがって、

$$BJ = JE$$

である。さらに、三角形 CBE は二等辺三角形で、

$$CB = CE = 3 \text{ cm}$$

となる。

直角三角形 JCE で三平方の定理を用いると、

$$JE = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

である。 $JE = CD$ より、

答え： $2\sqrt{2}$ cm

2 (2)

大問 4 の 2 (1) より、

$$BJ = JE = 2\sqrt{2}$$

なので、

$$BE = 4\sqrt{2}$$

である。

直角三角形 ABE で三平方の定理を用いると、

$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{9^2 - (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{81 - 32} = 7$$

となる。

また、問題図の条件より

$$CJ = ED = 1$$

であるから、

$$AD = AE + ED = 7 + 1 = 8$$

となる。

さらに、

$$AF : FD = 5 : 3$$

である。そこで、

$$AF = 5k, \quad FD = 3k$$

とおくと、

$$AF + FD = AD$$

より、

$$5k + 3k = 8$$

となる。したがって、

$$k = 1$$

なので、

$$AF = 5, \quad FD = 3$$

である。

$\triangle BIJ$ と $\triangle BFE$ において、 $OC \parallel AD$ より、

$$\angle BIJ = \angle BFE, \quad \angle BJI = \angle BEF$$

である。したがって、

$$\triangle BIJ \sim \triangle BFE$$

となる。

点 J は線分 BE の中点なので、相似比は

$$BJ : BE = 1 : 2$$

である。また、

$$FE = FD - ED = 3 - 1 = 2$$

だから、

$$IJ : FE = 1 : 2$$

より、

$$IJ = 1$$

となる。したがって、

$$IC = IJ + JC = 1 + 1 = 2$$

である。

点 I から線分 FE に垂線を下ろし、その足を K とする。問題図の平行関係より、

$$IK = CD = 2\sqrt{2}, \quad KE = IJ = 1$$

であるから、

$$FK = FE - KE = 2 - 1 = 1$$

となる。

直角三角形 IKF で三平方の定理を用いると、

$$IF = \sqrt{IK^2 + FK^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$$

である。

次に、 $\triangle IGC$ と $\triangle FGA$ において、対頂角が等しいので、

$$\angle IGC = \angle FGA$$

である。また、 $OC \parallel AD$ より錯角が等しいので、

$$\angle ICG = \angle FAG$$

である。

したがって、

$$\triangle IGC \sim \triangle FGA$$

となる。対応する辺の比は

$$IC : FA = 2 : 5$$

なので、

$$IG : GF = 2 : 5$$

である。

$$IF = IG + GF = 3$$

より、

$$IG = \frac{2}{2+5} \cdot 3 = \frac{6}{7}$$

となる。

答え： $\frac{6}{7}$ cm