

2023年度

福島県

数学

解答・解説

KmKm の学習支援サイト

大問 1

(1)

①

$$(-21) \div 7 = -3$$

答え：-3

②

$$-\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = -\frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{1}{12}$$

答え： $\frac{1}{12}$

③

$$(-3a) \times (-2b)^3 = (-3a) \times (-8b^3) = 24ab^3$$

答え： $24ab^3$

④

$$\sqrt{8} - \sqrt{18} = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

答え： $-\sqrt{2}$

(2)

もとの球の半径を r とすると、体積は

$$\frac{4}{3}\pi r^3$$

である。半径を 2 倍にした球の体積は

$$\frac{4}{3}\pi(2r)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 8r^3 = 8\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

となる。

答え：8 倍

大問 2

(1)

飲み物 a mL の 31% が桃の果汁なので、

$$a \times \frac{31}{100} = \frac{31}{100}a$$

mL である。

答え： $\frac{31}{100}a$ mL

(2)

$$3x + 2y - 4 = 0$$

を y について解く。

$$2y = -3x + 4$$

より、

$$y = -\frac{3}{2}x + 2$$

となる。

答え： $y = -\frac{3}{2}x + 2$

(3)

辺 AC 上に点 P をとり、 P から辺 AB 、 BC までの距離が等しくなるようにするには、点 P が $\angle ABC$ の二等分線上にあればよい。

したがって、 $\angle ABC$ の二等分線を作図し、その二等分線と辺 AC との交点を P とする。

答え： $\angle ABC$ の二等分線と辺 AC との交点

(4)

関数 $y = x^2$ について、

$$x = 1 \text{ のとき } y = 1, \quad x = 4 \text{ のとき } y = 16$$

である。したがって、変化の割合は

$$\frac{16 - 1}{4 - 1} = \frac{15}{3} = 5$$

となる。

答え：5

(5)

生徒は 30 人なので、データを小さい順に並べると、

第 1 四分位数は 8 番目、中央値は 15 番目と 16 番目の平均、

第 3 四分位数は 23 番目

に対応する。

ヒストグラムから、

6回以上8回未満までの累積度数は 12 人

なので、第 1 四分位数は 6 回以上 8 回未満にある。

また、8 回以上 10 回未満までの累積度数は 16 人なので、中央値は 8 回以上 10 回未満にある。

さらに、12 回以上 14 回未満までの累積度数は 25 人なので、第 3 四分位数は 12 回以上 14 回未満にある。

これらをすべて満たす箱ひげ図はエである。

答え：エ

大問 3

(1)

① ルール（ア）では、A が取り出した玉を袋に戻してから B が取り出す。したがって、A、B の取り出し方は全部で

$$3 \times 3 = 9 \text{通り}$$

である。

A の数字が B の数字より大きい組は

$$(2, 1), (3, 1), (3, 2)$$

の 3 通りだから、

$$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

である。

答え： $\frac{1}{3}$

② ルール（ア）で A が景品をもらえないのは、A の数字が B の数字以下のときである。9 通りのうち 6 通りなので、

$$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

である。

ルール（イ）では、A が取り出した玉を袋に戻さないで、2 人の数字が同じになることはない。全部で

$$3 \times 2 = 6 \text{通り}$$

であり、A の数字が B の数字より小さい組は

$$(1, 2), (1, 3), (2, 3)$$

の 3 通りだから、A が景品をもらえない確率は

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

である。

$$\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$$

なので、A が景品をもらえない確率が大きいのはルール（ア）である。

答え：ア、 $\frac{2}{3}$

(2)

- ① 縦、横に 2 つずつ並ぶ 4 個の整数を

$$\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}$$

とする。問題図の例では

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = 8, \quad d = 9$$

なので、

$$ad - bc = 1 \cdot 9 - 2 \cdot 8 = 9 - 16 = -7$$

となる。

答え：-7

- ② 1 段に n 個ずつ整数を並べると、

$$b = a + 1, \quad c = a + n, \quad d = a + n + 1$$

と表せる。したがって、

$$\begin{aligned} ad - bc &= a(a + n + 1) - (a + 1)(a + n) \\ &= a^2 + an + a - (a^2 + an + a + n) \\ &= -n \end{aligned}$$

となる。よって、どの位置で 4 個を選んでも $ad - bc$ は常に $-n$ である。

大問 4

4 人のグループの数を x 、5 人のグループの数を y とする。

生徒は全部で 200 人なので、

$$4x + 5y = 200 \quad (1)$$

である。

ごみ袋は、生徒 1 人につき 1 枚で 200 枚必要である。さらに、4 人のグループには 2 枚ずつ、5 人のグループには 3 枚ずつ予備を配るので、

$$200 + 2x + 3y = 314$$

となる。したがって、

$$2x + 3y = 114 \quad (2)$$

である。

(2) を 2 倍すると、

$$4x + 6y = 228 \quad (3)$$

となる。(3) から (1) をひくと、

$$y = 28$$

である。これを (2) に代入すると、

$$2x + 3 \cdot 28 = 114$$

$$2x = 30$$

より、

$$x = 15$$

となる。

答え：4 人のグループ：15 組、5 人のグループ：28 組

大問 5

(1)

$\triangle EDO$ と $\triangle EBD$ において、直線 AB と直線 CD の交点が E なので、対頂角は等しく、

$$\angle DEO = \angle BED \quad (1)$$

である。

また、 $AC \parallel DO$ より、錯角が等しいので、

$$\angle ACD = \angle EDO \quad (2)$$

である。

弧 AD に対する円周角は等しいから、

$$\angle ACD = \angle EBD \quad (3)$$

である。

(2)、(3) より、

$$\angle EDO = \angle EBD \quad (4)$$

となる。

(1)、(4) より、2組の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle EDO \sim \triangle EBD$$

である。

(2)

まず、 $\triangle EAC$ と $\triangle EOD$ において、 $AC \parallel DO$ より、

$$\angle EAC = \angle EOD, \quad \angle ECA = \angle EDO$$

である。したがって、

$$\triangle EAC \sim \triangle EOD$$

である。

対応する辺の比より、

$$EA : EO = AC : OD = 7 : 9$$

となる。そこで、

$$EA = 7k, \quad EO = 9k$$

とおく。

点 E、O、A は一直線上にあり、

$$OA = EA + EO = 16k$$

である。 $OA = OB$ は円の半径だから、

$$OB = 16k$$

となり、

$$EB = EO + OB = 9k + 16k = 25k$$

である。

また、(1) より

$$\triangle EDO \sim \triangle EBD$$

だから、

$$ED : EB = EO : ED$$

である。したがって、

$$ED^2 = EB \cdot EO = 25k \cdot 9k = 225k^2$$

より、

$$ED = 15k$$

となる。

よって、相似比は

$$ED : EB = 15k : 25k = 3 : 5$$

である。

答え：3 : 5

大問 6

(1)

$a = 1$ のとき、点 C は $y = x$ 上にあり、 $x = 2$ だから、

$$C(2, 2)$$

である。

点 B は $y = \frac{1}{x}$ 上にあり、 $x = 2$ だから、

$$B\left(2, \frac{1}{2}\right)$$

である。したがって、

$$BC = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

となる。

答え： $\frac{3}{2}$

(2)

一般に、点 B は

$$B\left(2, \frac{a}{2}\right)$$

点 C は

$$C(2, 2a)$$

である。したがって、

$$BC = 2a - \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$$

となる。

四角形 $ADBC$ が平行四辺形になるとき、向かい合う辺 AD と BC の長さが等しい。 $AD = 6$ だから、

$$\frac{3a}{2} = 6$$

より、

$$a = 4$$

となる。

答え：4

(3)

点 A は $y = \frac{a}{x}$ 上で $y = 6$ だから、

$$A\left(\frac{a}{6}, 6\right)$$

である。また、

$$B\left(2, \frac{a}{2}\right), \quad C(2, 2a), \quad D\left(\frac{a}{6}, 0\right)$$

である。

AD と BC はともに y 軸に平行なので、四角形 $ADBC$ は台形である。その平行な 2 辺の長さは

$$AD = 6, \quad BC = 2a - \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$$

であり、2 辺の間の距離は

$$2 - \frac{a}{6}$$

である。したがって、面積は

$$\frac{1}{2} \left(6 + \frac{3a}{2}\right) \left(2 - \frac{a}{6}\right) = -\frac{1}{8}a^2 + a + 6$$

となる。

$a = 1$ のときの面積は

$$-\frac{1}{8} + 1 + 6 = \frac{55}{8}$$

である。よって、

$$-\frac{1}{8}a^2 + a + 6 = \frac{55}{8}$$

$$a^2 - 8a + 7 = 0$$

$$(a - 1)(a - 7) = 0$$

となる。 $a = 1$ 以外を求めるので、

$$a = 7$$

である。

答え：7

大問 7

(1)

円錐の底面の半径は 1 cm、高さは正四角柱と等しく $\sqrt{15}$ cm である。円錐の頂点を Q、底面の中心を O、接点の 1 つを I とすると、 $\triangle QOI$ は直角三角形である。

三平方の定理より、

$$QI = \sqrt{QO^2 + OI^2} = \sqrt{15 + 1} = 4$$

となる。

答え：4 cm

(2)

円錐の側面を展開すると、半径 4 cm のおうぎ形になる。その中心角を θ とすると、おうぎ形の弧の長さは底面の円周 2π cm に等しいから、

$$2\pi \cdot 4 \cdot \frac{\theta}{360} = 2\pi$$

となる。したがって、

$$\theta = 90^\circ$$

である。

ひもが最も短くなるのは、展開図上で両端を直線で結んだときである。半径 4 cm、中心角 90° のおうぎ形の弦の長さなので、

$$\sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

となる。

答え： $4\sqrt{2}$ cm

(3)

円錐の展開図において、頂点 Q からひもを表す直線に垂線を下ろし、その足を P とする。この位置の P を立体に戻したとき、点 P から底面 ABCD までの距離が最も短くなる。

$QP = h$ cm とする。展開図の三角形の面積を 2 通りに表すと、

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot h$$

より、

$$h = 2\sqrt{2}$$

である。

点 P から底面 ABCD に下ろした垂線の足を R、接点 I から底面 ABCD に下ろした垂線の足を S とする。問題図の対応する直角三角形は相似であり、

$$PR : IQ = PQ : I'S$$

となる。ここで、

$$IQ = 4, \quad PQ = 2\sqrt{2}, \quad I'S = \sqrt{15}$$

だから、

$$\frac{PR}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$$

より、

$$PR = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

となる。

四角錐の底面は 1 辺 2 cm の正方形なので、底面積は

$$2 \times 2 = 4$$

である。したがって、体積は

$$4 \times \frac{\sqrt{30}}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{30}}{3}$$

となる。

$$\text{答え} : \frac{2\sqrt{30}}{3} \text{ cm}^3$$