

2023 年度

茨城県

数学

解答・解説

KmKm の学習支援サイト

1

(1)

①

$$1 - 6 = -5$$

答え：-5

②

$$\begin{aligned} 2(x + 3y) - (5x - 4y) &= 2x + 6y - 5x + 4y \\ &= -3x + 10y \end{aligned}$$

答え： $-3x + 10y$

③

$$15a^2b \div 3ab^3 \times b^2 = \frac{15a^2b \cdot b^2}{3ab^3} = 5a$$

答え： $5a$

④

$$\frac{9}{\sqrt{3}} - \sqrt{12} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

答え： $\sqrt{3}$

(2)

$$x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2 = (x - 3)^2$$

答え： $(x - 3)^2$

2

(1)

ア：箱ひげ図からは平均値を読み取ることができないので、誤りである。

イ：国語の最低点は 30 点より大きく、数学の最低点は 20 点、英語の最低点は 20 点より大きい。したがって、3 教科の合計点は、どの生徒についても

$$30 + 20 + 20 = 70$$

より大きいので、60 点以下の生徒はいない。よって正しい。

ウ：国語の中央値は 60 点以上である。25 人のデータでは中央値は小さい順に並べた 13 番目の値なので、少なくとも 13 人は 60 点以上である。よって誤りである。

エ：英語の第 3 四分位数は 80 点以上である。25 人のデータでは、第 3 四分位数は 19 番目と 20 番目の平均であるから、少なくとも上位 6 人は 80 点以上である。よって正しい。

答え：イ、エ

(2)

$$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$$

である。

$\frac{252}{n}$ を自然数の 2 乗にするには、素因数の指数をすべて偶数にすればよい。7 だけ指数が奇数なので、

$$n = 7$$

とすれば、

$$\frac{252}{7} = 2^2 \times 3^2 = 6^2$$

となる。

答え：7

(3)

$a = -1$ を代入すると、

$$x^2 + 3(-1)x + (-1)^2 - 7 = 0$$

より、

$$x^2 - 3x - 6 = 0$$

である。

解の公式より、

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}$$

となる。

$$\text{答え：} x = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}$$

(4)

箱の数を x 個とする。

1 箱に 30 個ずつ入れて 22 個余ったので、チョコレートの総数は

$$30x + 22$$

個である。

また、1 箱に 35 個ずつ入れ、最後の箱に 32 個入ったので、総数は

$$35(x - 1) + 32$$

個である。

したがって、

$$30x + 22 = 35(x - 1) + 32$$

より、

$$30x + 22 = 35x - 3, \quad 5x = 25$$

なので、

$$x = 5$$

となる。

答え：5 個

3

(1)

2 人のさいころの出方は全部で

$$6 \times 6 = 36 \text{通り}$$

である。

同じ段にいるのは、

$$(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$$

の 6 通りである。

したがって、

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

となる。

答え： $\frac{1}{6}$

(2)

太郎の目、花子の目を順に (a, b) と表す。

2 段離れる組は、

$$(1, 4), (2, 3), (3, 2), (3, 6), (4, 1), (4, 5), (5, 4), (6, 3)$$

の 8 通りである。

したがって、

$$\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

となる。

答え： $\frac{2}{9}$

(3)

3 段以上離れている場合は、全体から「同じ段」「1 段離れ」「2 段離れ」を除いて求める。

1 段離れる組は、

$$\begin{aligned} &(1, 5), \\ &(2, 4), (2, 6), \\ &(3, 3), (3, 5), \\ &(4, 2), (4, 4), \\ &(5, 1), (5, 3), \\ &(6, 2) \end{aligned}$$

の 10 通りである。

したがって、3 段以上離れる組は

$$36 - (6 + 10 + 8) = 12 \text{通り}$$

であるから、

$$\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

となる。

答え： $\frac{1}{3}$

4

(1) ①

OA, OB は円の半径なので、

$$OA = OB$$

である。したがって、点 O は線分 AB の中点である。

また、

$$OP \parallel BC$$

であるから、三角形 ABC において中点連結定理より、

$$OD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 10 = 5 \text{ cm}$$

となる。

答え：5 cm

(1) ②

三角形 ABC と三角形 POA において、 AB は直径であるから、半円の弧に対する円周角より、

$$\angle ACB = 90^\circ$$

である。

また、直線 l は点 A における円 O の接線なので、

$$\angle PAO = 90^\circ$$

である。したがって、

$$\angle ACB = \angle PAO$$

である。

さらに、 $BC \parallel OP$ より、同位角は等しいので、

$$\angle ABC = \angle POA$$

である。

よって、2 組の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABC \sim \triangle POA$$

である。

答え：ア：半円の弧に対する円周角、イ： $\angle ACB$ 、ウ： $\angle ABC$ 、エ： $\angle POA$ 、オ：2 組の角

(2)

$\angle PAO = 90^\circ$ 、 $\angle AOP = 60^\circ$ より、

$$\angle OPA = 30^\circ$$

である。

したがって、三角形 PAO は 30° 、 60° 、 90° の直角三角形であり、

$$AO : OP : PA = 1 : 2 : \sqrt{3}$$

となる。

$AO = 7$ cm だから、

$$OP = 14 \text{ cm}, \quad PA = 7\sqrt{3} \text{ cm}$$

である。

また、 OE は半径なので、

$$OE = 7 \text{ cm}$$

である。よって、

$$EP = OP - OE = 14 - 7 = 7 \text{ cm}$$

となる。

三角形 PAO と三角形 PAE は、底辺をそれぞれ OP 、 EP とすると高さが等しいので、面積比は底辺比に等しい。

$$\triangle PAO : \triangle PAE = 14 : 7 = 2 : 1$$

である。

三角形 PAO の面積は

$$\frac{1}{2} \times 7 \times 7\sqrt{3} = \frac{49\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$$

だから、

$$\triangle PAE = \frac{1}{2} \times \frac{49\sqrt{3}}{2} = \frac{49\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$$

となる。

答え： $\frac{49\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$

5

(1) ①

放物線 m を

$$y = ax^2$$

とする。点 $B(6, 6)$ を通るので、

$$6 = a \cdot 6^2$$

より、

$$a = \frac{1}{6}$$

となる。

答え： $\frac{1}{6}$

(1) ②

a の値が大きくなるほど、放物線の開きは狭くなり、直線 OB との交点 P は点 C の方へ動く。

反対に、 a の値が小さくなるほど、点 P は点 B の方へ動く。

また、

$$a = \frac{1}{3}$$

のとき、放物線は

$$y = \frac{1}{3}x^2$$

である。直線 OB は $y = x$ だから、

$$\frac{1}{3}x^2 = x$$

より、

$$x = 0, 3$$

となる。点 O 以外の交点は $(3, 3)$ であり、線分 CD 上にある。

答え：オ

(2)

直線 ℓ は

$$y = bx$$

であり、線分 AB との交点は

$$E(6, 6b)$$

である。

三角形 OEB の边上または内部にある格子点の個数を、 $x = 0, 1, \dots, 6$ ごとに数える。各 x に対して、

$$bx \leq y \leq x$$

を満たす整数 y の個数を数えればよい。

点の個数が 12 個になる境目は、

$$b = \frac{3}{5}, \quad b = \frac{2}{3}$$

である。

$b = \frac{3}{5}$ のときは、直線上に余分な格子点が現れて 13 個となるため含まれない。一方、 $b = \frac{2}{3}$ のときは 12 個となるので含まれる。

したがって、

$$\frac{3}{5} < b \leq \frac{2}{3}$$

である。

答え： $\frac{3}{5} < b \leq \frac{2}{3}$

6

(1)

$BP : PC = 2 : 1$ 、 $BC = 6$ cm より、

$$PC = 2 \text{ cm}$$

である。

また、 $CQ : QD = 2 : 1$ 、 $CD = 6$ cm より、

$$CQ = 4 \text{ cm}$$

である。

点 P から CD に垂線を下ろし、その足を H とする。三角形 BCD は正三角形なので、

$$\angle PCH = 60^\circ$$

である。

直角三角形 PCH は、 30° 、 60° 、 90° の三角形であり、斜辺 $PC = 2$ cm だから、

$$CH = 1 \text{ cm}, \quad PH = \sqrt{3} \text{ cm}$$

である。

したがって、

$$HQ = CQ - CH = 4 - 1 = 3 \text{ cm}$$

となる。

直角三角形 PHQ において、三平方の定理より、

$$PQ^2 = PH^2 + HQ^2 = (\sqrt{3})^2 + 3^2 = 12$$

であるから、

$$PQ = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

となる。

ここで、

$$PC^2 + PQ^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 = 4 + 12 = 16 = 4^2 = CQ^2$$

である。

三平方の定理の逆より、

$$\angle CPQ = 90^\circ$$

であるから、三角形 CPQ は直角三角形である。

答え：ウ

(2) ①

三角形 ACD は 1 辺 6 cm の正三角形であり、

$$CQ = 4 \text{ cm}, \quad QD = 2 \text{ cm}$$

である。

A から CD に垂線を下ろし、その足を H とする。正三角形の性質より、

$$CH = HD = 3 \text{ cm}, \quad AH = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

である。

したがって、

$$HQ = 4 - 3 = 1 \text{ cm}$$

であるから、直角三角形 AHQ において、

$$AQ = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \text{ cm}$$

となる。

答え： $2\sqrt{7}$ cm

(2) ②

直線 AP を軸として三角形 APQ を 1 回転させる。点 Q から直線 AP に垂線を下ろし、その足を H とする。

回転してできる立体は、共通の底面をもつ 2 つの円錐を合わせたものである。底面の半径は QH 、2 つの円錐の高さの和は AP である。したがって、体積 V は

$$V = \frac{1}{3}\pi QH^2 \cdot AP$$

である。

正四面体を座標で表すと、

$$A(3, \sqrt{3}, 2\sqrt{6}), \quad P(2, 0, 0), \quad Q(2, 2\sqrt{3}, 0)$$

とおける。

このとき、

$$AP = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{6})^2} = 2\sqrt{7}$$

である。

また、三角形 APQ の面積は

$$5\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

であるから、

$$5\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot QH$$

より、

$$QH = \frac{10\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{21}}{7}$$

である。

したがって、

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi \left(\frac{5\sqrt{21}}{7} \right)^2 \cdot 2\sqrt{7} \\ &= \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{75}{7} \cdot 2\sqrt{7} \\ &= \frac{50\sqrt{7}}{7}\pi \end{aligned}$$

となる。

$$\text{答え：} \frac{50\sqrt{7}}{7}\pi \text{ cm}^3$$