

2023年度 宮城県

数学

解答・解説

KmKm の学習支援サイト

第一問

1

与式を計算すると、

$$-7$$

答え：-7

2

$$-15 \times \left(-\frac{3}{5}\right) = 9$$

答え：9

3

110 を素因数分解すると、

$$110 = 2 \times 55 = 2 \times 5 \times 11$$

答え： $2 \times 5 \times 11$

4

$$4a - 9b + 3 = 0$$

より、

$$4a = 9b - 3$$

したがって、

$$a = \frac{9b - 3}{4} = \frac{9}{4}b - \frac{3}{4}$$

答え： $a = \frac{9b - 3}{4}$

5

$$\begin{cases} 3x - y = 17 & \cdots \textcircled{1} \\ 2x - 3y = 30 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①を3倍して、

$$9x - 3y = 51$$

これから②を引くと、

$$7x = 21$$

よって、 $x = 3$ 。

これを②に代入すると、

$$2 \times 3 - 3y = 30$$

$$-3y = 24$$

より、 $y = -8$ 。

答え： $x = 3, y = -8$

6

$$3\sqrt{6} + 2\sqrt{6} = 5\sqrt{6}$$

答え： $5\sqrt{6}$

7

点 A は $y = \frac{2}{3}x$ 上にあり、 $x = 6$ なので、

$$y = \frac{2}{3} \times 6 = 4$$

したがって、

$$A(6, 4)$$

である。

また、点 A は $y = \frac{a}{x}$ 上にあるので、

$$4 = \frac{a}{6}$$

よって、

$$a = 24$$

答え：24

8

ア：第1四分位数は、A組の方がB組より小さいので誤り。

イ：四分位範囲が最も小さいのはB組なので誤り。

ウ：各組の人数は35人であり、中央値は小さい方から18番目の値である。A組とC組では、6冊以上の生徒は多くても17人である。一方、B組の中央値は6冊なので、6冊以上の生徒は少なくとも18人いる。したがって正しい。

エ：A 組の範囲は 2 冊以上 8 冊以下なので、35 人全員がこの範囲に入る。B 組は少なくとも 1 人が 1 冊、C 組は少なくとも 1 人が 1 冊、1 人が 9 冊なので、2 冊以上 8 冊以下の人数は A 組が最も多い。したがって誤り。

答え：ウ

第二問

1

おうぎ形の弧の長さは、

$$\text{直径} \times \pi \times \frac{\text{中心角}}{360^\circ}$$

より、

$$4 \times 2 \times \pi \times \frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{8\pi}{3}$$

答え： $\frac{8\pi}{3}$ cm

2

問題図は左右対称なので、

$$\angle COB = \angle COA = 60^\circ$$

である。

したがって、 $\triangle BOC$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形であり、

$$OB : OC : BC = 1 : 2 : \sqrt{3}$$

である。 $OB = 4$ cm なので、

$$BC = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

片側の色が付いた部分の面積は、

$$\triangle BOC - \text{おうぎ形 } OBD$$

であるから、

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} - 4^2 \pi \times \frac{60^\circ}{360^\circ} = 8\sqrt{3} - \frac{8\pi}{3}$$

となる。

同じ形が2つあるので、求める面積は、

$$2 \left(8\sqrt{3} - \frac{8\pi}{3} \right) = 16\sqrt{3} - \frac{16\pi}{3}$$

答え： $\left(16\sqrt{3} - \frac{16\pi}{3} \right) \text{ cm}^2$

3

(1)

$y = ax^2$ において、 x が p から q まで変化するときの変化の割合は、

$$a(p+q)$$

である。

したがって、 $y = \frac{1}{4}x^2$ において、 x が 0 から 6 まで変化するときの変化の割合は、

$$\frac{1}{4}(0+6) = \frac{3}{2}$$

答え： $\frac{3}{2}$

(2)

舞さんの走った道のりを表すグラフは原点と $(6, 9)$ を通る直線である。式を $y = ax$ とおくと、

$$9 = 6a$$

より、

$$a = \frac{3}{2}$$

したがって、

$$y = \frac{3}{2}x$$

である。

ボールの道のりは $y = \frac{1}{4}x^2$ で表される。ボールが舞さんを追い越した後、2 人の間の距離が 18 m になるとき、

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x = 18$$

両辺を 4 倍して、

$$x^2 - 6x - 72 = 0$$

$$(x+6)(x-12) = 0$$

より、

$$x = -6, 12$$

時間なので $x > 0$ から、

$$x = 12$$

答え：12 秒後

4

最初に箱の中にあった白球の数を x 個とする。赤球と白球の比は 4 : 1 なので、赤球は $4x$ 個である。

白球を 300 個加えた後、球の合計は、

$$x + 4x + 300 = 5x + 300$$

個である。

取り出した 120 個のうち赤球が 80 個なので、赤球の割合は、

$$\frac{80}{120} = \frac{2}{3}$$

である。よって、

$$\frac{4x}{5x+300} = \frac{2}{3}$$
$$12x = 10x + 600$$
$$x = 300$$

したがって、赤球は、

$$4x = 4 \times 300 = 1200$$

個である。

答え：1200 個

5

(1)

各行には、3 個ずつ数が並ぶ。奇数行では左から小さい順、偶数行では右から小さい順に並ぶ。

45 は、

$$45 = 3 \times 15$$

より、15 行目の 3 列目にある。

答え：15 行目の 3 列目

(2) ア

各行の最も小さい数は、

$$1, 4, 7, \dots$$

と 3 ずつ増える。

したがって、 n 行目の最も小さい数 P は、

$$P = 1 + 3(n - 1) = 3n - 2$$

答え： $3n - 2$

(2) イ

$n - 1$ 行目の最も小さい数は、

$$3(n - 1) - 2 = 3n - 5$$

である。各行の最も大きい数は、最も小さい数より 2 大きいので、 $n - 1$ 行目の最も大きい数 Q は、

$$Q = 3n - 5 + 2 = 3n - 3$$

である。

$P + Q = 349$ より、

$$(3n - 2) + (3n - 3) = 349$$

$$6n = 354$$

$$n = 59$$

となる。

59 は奇数なので、59 行目の 3 列目が最も大きい数である。59 行目の最も小さい数は、

$$3 \times 59 - 2 = 175$$

よって、最も大きい数は、

$$175 + 2 = 177$$

答え：177

第三問

1

(1)

点 P は、

$$(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)$$

の 4 通り、点 Q は、

$$(1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0)$$

の 4 通りである。

したがって、 $\triangle OPQ$ の作り方は、

$$4 \times 4 = 16$$

通りである。

答え：16 通り

(2)

$\triangle OPQ$ が直角三角形になる場合を考える。

まず、点 P と点 Q の x 座標が等しいとき、すなわち $a = b$ のとき、 $\angle OQP = 90^\circ$ となる。この場合は 4 通りである。

また、 $OP = OQ$ のとき、 $\angle POQ = \angle PQO = 45^\circ$ となるので、 $\angle OPQ = 90^\circ$ である。この場合は 2 通りである。

したがって、条件を満たすのは、

$$4 + 2 = 6$$

通りである。よって、求める確率は、

$$\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

答え： $\frac{3}{8}$

2

(1)

辺 BC の中点を R とする。

$\triangle ABR$ と $\triangle ACR$ は、底辺をそれぞれ BR, CR とすると高さが等しい。また、

$$BR = CR$$

なので、面積は等しい。

したがって、頂点 A と辺 BC の中点を通る直線は、 $\triangle ABC$ の面積を 2 等分する。

答え：頂点 A と辺 BC の中点を通る直線

(2)

点 $B(1, 1)$ 、点 $C(4, 0)$ を通る直線の式を、

$$y = ax + b$$

とおく。

傾きは、

$$a = \frac{0 - 1}{4 - 1} = -\frac{1}{3}$$

である。点 $C(4, 0)$ を通るので、

$$0 = -\frac{1}{3} \times 4 + b$$

より、

$$b = \frac{4}{3}$$

したがって、

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$\text{答え：} y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

(3)

$$\triangle ABC = \triangle AOC - \triangle BOC$$

より、

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 - \frac{1}{2} \times 4 \times 1 = 8 - 2 = 6$$

である。

直線 DE は $\triangle ABC$ の面積を 2 等分するので、

$$\triangle DBE = 3$$

である。

点 E の座標を (s, t) とする。点 E は直線 BC 上にあるので、

$$t = -\frac{1}{3}s + \frac{4}{3} \quad \dots \textcircled{1}$$

点 $D(3, 3)$ 、点 $B(1, 1)$ 、点 $E(s, t)$ から、 $\triangle DBE$ の面積は、

$$\frac{1}{2} |(-2)(t - 3) - (-2)(s - 3)| = |s - t|$$

である。

図の位置関係より $s > t$ なので、

$$s - t = 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

①を②に代入すると、

$$s - \left(-\frac{1}{3}s + \frac{4}{3}\right) = 3$$

$$\frac{4}{3}s = \frac{13}{3}$$

$$s = \frac{13}{4}$$

さらに、

$$t = -\frac{1}{3} \cdot \frac{13}{4} + \frac{4}{3} = \frac{1}{4}$$

したがって、

$$E\left(\frac{13}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

$$\text{答え: } \left(\frac{13}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

第四問

1

$\triangle CDE$ と $\triangle BFE$ において、問題の条件より、

$$DE : FE = 2 : 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

また、 $BC = 9$ cm、 $BE = 3$ cm なので、

$$CE = 6 \text{ cm}$$

よって、

$$CE : BE = 2 : 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

①、②より、

$$DE : FE = CE : BE \quad \dots \textcircled{3}$$

また、対頂角は等しいので、

$$\angle CED = \angle BEF \quad \dots \textcircled{4}$$

③、④より、2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle CDE \sim \triangle BFE$$

(証明終わり)

2

第四問 1 より、

$$\triangle CDE \sim \triangle BFE$$

であり、相似比は $2 : 1$ である。

対応する辺の比より、

$$CD : BF = 2 : 1$$

$CD = 7$ cm なので、

$$2BF = 7$$

$$BF = \frac{7}{2}$$

答え： $\frac{7}{2}$ cm

3

(1)

問題図より、四角形 $ABCD$ は等脚台形であり、

$$AD = 5 \text{ cm}, \quad BC = 9 \text{ cm}$$

である。したがって、

$$CG = \frac{BC - AD}{2} = \frac{9 - 5}{2} = 2 \text{ cm}$$

である。

$\triangle DGC$ で三平方の定理より、

$$DG = \sqrt{DC^2 - CG^2} = \sqrt{7^2 - 2^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

答え： $3\sqrt{5}$ cm

(2)

まず、

$$\triangle DBC = \frac{1}{2} \times 9 \times 3\sqrt{5} = \frac{27\sqrt{5}}{2}$$

である。

第四問 1 より、

$$\triangle CDE \sim \triangle BFE$$

なので、対応する角は等しい。したがって、

$$\angle DCE = \angle EBF$$

より、錯角が等しいので、

$$BF \parallel DH$$

である。よって、四角形 $BFHC$ は $BF \parallel HC$ の台形である。

次に、 $\triangle HCG$ と $\triangle HDA$ において、

$$CG \parallel DA$$

より、

$$\angle HCG = \angle HDA, \quad \angle HGC = \angle HAD$$

したがって、

$$\triangle HCG \sim \triangle HDA$$

である。

対応する辺の比より、

$$HC : HD = CG : DA = 2 : 5$$

また、

$$HD = HC + CD = HC + 7$$

なので、

$$HC : (HC + 7) = 2 : 5$$

$$5HC = 2(HC + 7)$$

$$3HC = 14$$

$$HC = \frac{14}{3}$$

である。

$\triangle DBC$ と台形 $BFHC$ の高さは等しいので、面積比は、

$$\triangle DBC : \text{台形 } BFHC = DC : (BF + HC)$$

となる。

第四問 2 より $BF = \frac{7}{2}$ なので、

$$DC : (BF + HC) = 7 : \left(\frac{7}{2} + \frac{14}{3} \right) = 7 : \frac{49}{6}$$

したがって、

$$\frac{27\sqrt{5}}{2} : \text{台形 } BFHC = 7 : \frac{49}{6}$$

より、

$$\text{台形 } BFHC = \frac{27\sqrt{5}}{2} \times \frac{49}{6} \times \frac{1}{7} = \frac{63\sqrt{5}}{4}$$

答え : $\frac{63\sqrt{5}}{4} \text{ cm}^2$