

2023年度

栃木県

数学

解答・解説

KmKm の学習支援サイト

1 大問 1

1

$$3 - (-5) = 3 + 5 = 8$$

答え：8

2

$$\frac{8a^3b^2}{6ab} = \frac{4}{3}a^2b$$

答え： $\frac{4}{3}a^2b$

3

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

答え： $x^2 + 6x + 9$

4

パン 7 個の代金は $7x$ 円、ジュース 5 本の代金は $5y$ 円である。合計が 2000 円以下なので、

答え： $7x + 5y \leq 2000$

5

辺 AB と交わらず、平行でもなく、同一平面上にない辺は、 BC, CD, FG, GH である。

答え：4 本

6

$y = \frac{a}{x}$ とおく。 $x = -2, y = 8$ より $8 = \frac{a}{-2}$ なので $a = -16$ 。

答え： $y = -\frac{16}{x}$

7

弧 AC に対する中心角は 134° なので、同じ弧に対する円周角は 67° である。円に内接する四角形の向かい合う角の和は 180° だから、 $x = 180 - 67 = 113$ 。

答え： 113°

8

相似比が $3:5$ なので、面積比は $3^2:5^2=9:25$ 。

答え： $\frac{25}{9}$ 倍

2 大問 2

1

解の公式より、

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}.$$

答え： $x = -2 \pm \sqrt{3}$

2

使用できる教室の数を x とする。15 人ずつ入れると 34 人入れないので参加者数は $15x + 34$ 人。20 人ずつ入れると、14 人の教室が 1 つ、空き教室が 1 つできるので参加者数は $20(x - 2) + 14$ 人である。

$$15x + 34 = 20(x - 2) + 14$$

$$-5x = -60, \quad x = 12$$

答え：12 教室

3

3 けたの自然数 M の百の位、十の位、一の位をそれぞれ a, b, c とする。このとき

$$M = 100a + 10b + c.$$

また、 $N = M + 99$ より、

$$\begin{aligned} N &= 100a + 10b + c + 100 - 1 \\ &= 100(a + 1) + 10b + (c - 1). \end{aligned}$$

したがって、 N の各位は $a + 1, b, c - 1$ であり、その和は

$$(a + 1) + b + (c - 1) = a + b + c$$

となる。よって、 M と N の各位の数の和は等しい。

答え：① 100、② 10、③ $a + 1$ 、④ b 、⑤ $c - 1$

3 大問 3

1

点 B を中心として半径 AB の円をかき、点 A を中心として半径 AB の円をかく。2 つの円の交点を Q とすると、 $\triangle ABQ$ は正三角形なので $\angle ABQ = 60^\circ$ である。次に $\angle ABQ$ の二等分線を作図し、辺 AC との交点を P とする。このとき $\angle ABP = 30^\circ$ である。

答え：上記の作図による点 P

2 (1)

$AB = 2$ 、 $BC = 3$ 、 $CD = 3$ である。点 A から CD に垂線を下ろし、その足を P とすると、 $AP = BC = 3$ 、 $DP = CD - AB = 1$ である。三平方の定理より、

$$AD = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}.$$

答え： $\sqrt{10}$ cm

2 (2)

辺 CD を軸として回転すると、半径 3 cm、高さ 2 cm の円柱と、半径 3 cm、高さ 1 cm の円すいを合わせた立体になる。

円柱の体積は

$$3^2\pi \times 2 = 18\pi$$

であり、円すいの体積は

$$\frac{1}{3} \times 3^2\pi \times 1 = 3\pi$$

である。したがって、求める体積は

$$18\pi + 3\pi = 21\pi.$$

答え： 21π cm³

3

$\triangle ABF$ と $\triangle DAG$ において、仮定より

$$\angle BFA = \angle AGD = 90^\circ.$$

正方形 $ABCD$ より

$$AB = DA.$$

また、 $\angle BAD = 90^\circ$ であるから、

$$\angle BAF + \angle DAG = 90^\circ.$$

直角三角形 DAG においても、

$$\angle ADG + \angle DAG = 90^\circ$$

なので、 $\angle BAF = \angle ADG$ 。したがって、直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいので、

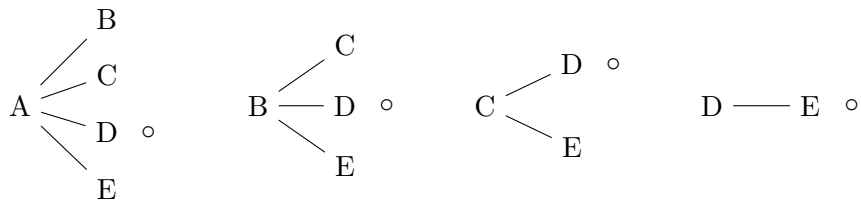
$$\triangle ABF \equiv \triangle DAG.$$

(証明終わり)

4 大問 4

1

2 人の選び方を樹形図で表す。重複を避けるため、2 人目は 1 人目より後ろの生徒から選ぶ。



樹形図より、2 人の選び方は

$(A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (B, C), (B, D), (B, E), (C, D), (C, E), (D, E)$

の 10 通りである。このうち、D が選ばれるのは

$(A, D), (B, D), (C, D), (D, E)$

の 4 通りである。したがって、求める確率は

$$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

答え： $\frac{2}{5}$

2 (1)

18.0 秒未満までの累積度数は $2 + 7 = 9$ 人、20.0 秒未満まででは $2 + 7 + 8 = 17$ 人。

答え：17 人

2 (2)

度数が最も多い階級は 20.0 秒以上 22.0 秒未満である。階級値は

$$\frac{20.0 + 22.0}{2} = 21.0.$$

答え：21.0 秒

3 (1)

中央値は 2 回目の方が大きいのでアは正しい。最大値は 2 回目の方が大きいのでイは誤り。範囲は 1 回目が $18 - 6 = 12$ 、2 回目が $20 - 8 = 12$ で等しいためウは誤り。四分位範囲は 2 回目の方が小さいのでエは正しい。

答え：ア、エ

3 (2)

100 人の第 1 四分位数は、得点を小さい順に並べたときの 25 番目と 26 番目の平均である。例えば、25 番目が 7 点、26 番目が 9 点であれば、8 点の生徒がいなくても第 1 四分位数は 8 点となる。

5 大問 5

1 (1)

$y = 2x^2$ で $-1 \leq x \leq 5$ 。最小値は $x = 0$ のとき 0、最大値は $x = 5$ のとき 50。

答え： $0 \leq y \leq 50$

1 (2)

$t = 2$ のとき、

$$A(2, 10), \quad B(2, 8), \quad C(-2, 8)$$

である。

直線 AC の傾きは

$$\frac{10 - 8}{2 - (-2)} = \frac{1}{2}$$

であるから、直線 AC の式を $y = \frac{1}{2}x + b$ とおくと、点 $A(2, 10)$ を通るので、

$$10 = \frac{1}{2} \times 2 + b$$

より、 $b = 9$ である。したがって、直線 AC と y 軸との交点を P とすると、 $P(0, 9)$ である。

$\triangle OAC$ を $\triangle OAP$ と $\triangle OPC$ に分ける。どちらの三角形も、底辺を $OP = 9$ 、高さを 2 とみることができるので、

$$\begin{aligned} \triangle OAC &= \triangle OAP + \triangle OPC \\ &= \frac{1}{2} \times 9 \times 2 + \frac{1}{2} \times 9 \times 2 \\ &= 18. \end{aligned}$$

答え：18

1 (3)

$B(t, 2t^2)$ 、 $C(-t, 2t^2)$ 、 $D(-t, -5t)$ である。したがって、

$$BC = 2t, \quad CD = 2t^2 + 5t.$$

$BC : CD = 1 : 4$ より、

$$2t : (2t^2 + 5t) = 1 : 4$$

$$8t = 2t^2 + 5t$$

$$t(2t - 3) = 0.$$

$t > 0$ より、

答え： $t = \frac{3}{2}$

2 (1)

6 分で 390 m 進んだので、速さは $390 \div 6 = 65$ 。

答え：毎分 65 m

2 (2)

後藤さんと別れた後、前田さんは毎分 70 m で進む。点 (6, 390) を通るので、

$$y = 70x + b, \quad 390 = 70 \times 6 + b$$

より $b = -30$ 。

答え： $y = 70x - 30$

2 (3)

追いついた地点は図書館まで 280 m なので、学校から $1650 - 280 = 1370$ m の地点である。前田さんのグラフは $y = 70x - 380$ となるから、

$$1370 = 70x - 380$$

より $x = 25$ 。後藤さんは毎分 210 m で進み、時刻 25 分に 1370 m 地点で追いつく。後藤さんが家を出た時刻を x 分とすると、

$$1370 - 390 = 210(25 - x)$$

$$980 = 210(25 - x), \quad 25 - x = \frac{14}{3}.$$

したがって、家に着いた時刻 6 分から $14\frac{1}{3}$ 分後、すなわち 14 分 20 秒後に出発した。

答え：家に着いてから 14 分 20 秒後

6 大問 6

1

1 辺 4 cm の正方形の中には、1 cm 四方の正方形が $4 \times 4 = 16$ 個ある。1 個につき白いタイルを 4 枚使うので、

$$16 \times 4 = 64.$$

答え：64 枚

2

$n = 5$ のとき、1 cm 四方の正方形は 25 個で、使用するタイルは全部で 49 枚である。黒いタイルを x 枚、白いタイルを y 枚とすると、

$$x + y = 49 \quad \dots \textcircled{1}$$

また、黒い正方形 1 個には黒 1 枚、白い正方形 1 個には白 4 枚を使うので、

$$x + \frac{y}{4} = 25 \quad \dots \textcircled{2}$$

②を 4 倍して $4x + y = 100$ 。①との差より $3x = 51$ なので $x = 17$ 、 $y = 32$ 。

答え：黒いタイル 17 枚、白いタイル 32 枚

3

$n = a$ のとき、1 cm $\times$ 1 cm の正方形は全部で a^2 個ある。

はじめに使った黒いタイルが b 枚であるから、貼り方 I の正方形は b 個である。したがって、貼り方 II の正方形は

$$a^2 - b$$

個である。貼り方 II では 1 個の正方形につき白いタイルを 4 枚使うので、はじめに使った白いタイルの枚数は

$$4(a^2 - b)$$

枚である。

よって、①は

$$\boxed{4(a^2 - b)}$$

である。

貼り方 I と貼り方 II を入れ替えた後に使うタイルの合計は、

$$4b + (a^2 - b) = a^2 + 3b$$

枚である。一方、はじめに使ったタイルの合計は、

$$b + 4(a^2 - b) = 4a^2 - 3b$$

枚である。

貼り方を入れ替えた後は、はじめより 225 枚少なくなったので、

$$a^2 + 3b = 4a^2 - 3b - 225$$

となる。これを整理すると、

$$-3a^2 + 6b = -225$$

$$a^2 - 2b = 75$$

$$a^2 = 75 + 2b.$$

a は 2 以上の整数、 b は 1 以上の整数である。したがって、 $a^2 > 75$ であり、 a は 9 以上である。

$a = 9$ のとき、

$$81 = 75 + 2b$$

より $b = 3$ となり、条件を満たす。

$a = 10$ のとき、

$$100 = 75 + 2b$$

より $b = \frac{25}{2}$ となり、 b が整数ではないため条件を満たさない。

$a = 11$ のとき、

$$121 = 75 + 2b$$

より $b = 23$ となり、条件を満たす。

したがって、条件を満たす a のうち、最も小さい値は 9、その次に小さい値は 11 である。

答え：① $4(a^2 - b)$ 、② 9、③ 11