

2024年度

福島県

数学

解答・解説

KmKm の学習支援サイト

大問 1

(1)

①

$$-5 + 9 = 4$$

答え：4

②

$$\frac{2}{5} \div \left(-\frac{8}{15}\right) = \frac{2}{5} \times \left(-\frac{15}{8}\right) = -\frac{30}{40} = -\frac{3}{4}$$

答え： $-\frac{3}{4}$

③

$$7x - 3y + 2x + y = (7x + 2x) + (-3y + y) = 9x - 2y$$

答え： $9x - 2y$

④

$$3\sqrt{6} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{18} = 3\sqrt{9 \times 2} = 3 \cdot 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$$

答え： $9\sqrt{2}$

(2)

$x + y = A$ とおくと、

$$(x + y - 1)(x + y + 1) = (A - 1)(A + 1)$$

となる。ここで、

$$(A - 1)(A + 1) = A^2 - 1$$

であるから、

$$(x + y - 1)(x + y + 1) = A^2 - 1$$

となる。さらに、 $A = x + y$ を代入すると、

$$A^2 - 1 = (x + y)^2 - 1 = x^2 + 2xy + y^2 - 1$$

である。

答え： $x^2 + 2xy + y^2 - 1$

大問 2

(1)

黒ペン 5 本の代金は $5a$ 円、赤ペン 2 本の代金は $2b$ 円である。合計の代金が 1020 円なので、

$$5a + 2b = 1020$$

となる。

答え： $5a + 2b = 1020$

(2)

一次関数 $y = 5x + 2$ の傾きは 5 である。傾きは「 x が 1 増えるときの y の増加量」を表すので、 x が 1 増えるごとに y は 5 増える。

ここで、 x は 1 から 4 まで増加するから、 x の増加量は

$$4 - 1 = 3$$

である。したがって、 y の増加量は

$$5 \times 3 = 15$$

となる。

別の見方をすると、

$$x = 1 \text{ のとき } y = 5 \cdot 1 + 2 = 7$$

$$x = 4 \text{ のとき } y = 5 \cdot 4 + 2 = 22$$

だから、

$$22 - 7 = 15$$

となり、同じ答えになる。

答え：15

(3)

$\triangle OBC$ は $OB = OC$ の二等辺三角形であるから、

$$\angle OBC = \angle BCO = 48^\circ$$

である。したがって、

$$\angle BOC = 180^\circ - 48^\circ - 48^\circ = 84^\circ$$

となる。弧 BC に対する中心角が $\angle BOC$ 、円周角が $\angle BAC = x$ なので、

$$x = \frac{1}{2} \times 84^\circ = 42^\circ$$

である。

答え： 42°

(4)

データは 9 個なので、中央値は 5 番目の 102 である。中央値より大きい 4 個のデータは

$$114, 118, 122, 143$$

である。第 3 四分位数は、この 4 個のデータの中央にある 2 つの値の平均だから、

$$\frac{118 + 122}{2} = 120$$

となる。

答え：120

(5)

円の接線は、接点を通る半径に垂直である。したがって、点 P を通り、直線 OP に垂直な直線を作図すればよい。

答え：点 P を通り、 OP に垂直な直線

大問 3

(1)

2つのさいころの出方は全部で

$$6 \times 6 = 36 \text{通り}$$

である。

① 出た目の和が6の倍数になるのは、和が6または12のときである。

$$(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 6)$$

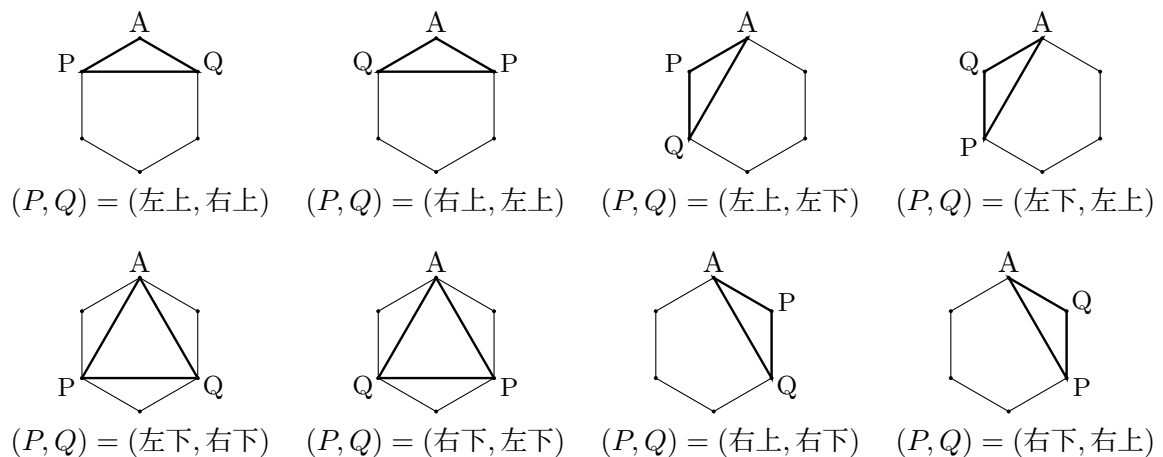
の6通りだから、

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

である。

答え： $\frac{1}{6}$

② $\triangle APQ$ が二等辺三角形になる位置関係は、次の8通りである。



したがって、二等辺三角形になるのは8通りであり、求める確率は

$$\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

となる。

答え： $\frac{2}{9}$

(2)

① 1番目の図形は 1×1 、2番目の図形は 2×2 、3番目の図形は 3×3 の正方形になっている。したがって、 n 番目の図形に使うタイルの枚数は

$$n \times n = n^2$$

枚である。よって、23 番目の図形に使うタイルの枚数は

$$23^2 = 529$$

枚である。

答え：529 枚

② $(n - 1)$ 番目の図形に使うタイルの枚数は

$$(n - 1)^2$$

枚であり、 n 番目の図形に使うタイルの枚数は

$$n^2$$

枚である。

したがって、 $(n - 1)$ 番目の図形を囲むように新たに付け加えるタイルの枚数は

$$n^2 - (n - 1)^2$$

枚である。これを計算すると、

$$n^2 - (n - 1)^2 = n^2 - (n^2 - 2n + 1) = 2n - 1$$

となる。

ここで、 n は 2 以上の整数だから、 $2n$ は偶数である。偶数から 1 をひいた数 $2n - 1$ は奇数である。

したがって、新たに必要なタイルの枚数は必ず奇数になる。

大問 4

水を移す前の容器 A の水の量を x mL、容器 B の水の量を y mL とする。合わせて 820 mL だから、

$$x + y = 820 \quad (1)$$

である。

容器 C には、A の $\frac{1}{4}$ と B の $\frac{1}{3}$ を移すので、C の水の量は

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y$$

mL である。また、A に残る水の量は

$$x - \frac{1}{4}x = \frac{3}{4}x$$

mL である。

C の水の量は、A に残る水の量より 60 mL 少ないから、

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y = \frac{3}{4}x - 60$$

となる。両辺を 12 倍して整理すると、

$$3x + 4y = 9x - 720$$

$$3x - 2y = 360 \quad (2)$$

である。

(1) を 2 倍すると、

$$2x + 2y = 1640 \quad (3)$$

となる。(2) と (3) を加えると、

$$\begin{array}{r} 3x - 2y = 360 \\ 2x + 2y = 1640 \\ \hline 5x = 2000 \end{array}$$

だから、

$$x = 400$$

である。これを (1) に代入すると、

$$400 + y = 820$$

より、

$$y = 420$$

となる。

答え：容器 A：400 mL、容器 B：420 mL

大問 5

$\triangle CIE$ と $\triangle CIB$ において、

$$CI = CI$$

である。

長方形 $ABCD$ と長方形 $EFGH$ は合同であるから、対角線の長さも等しい。したがって、

$$CE = BF$$

である。

また、 $ABCD$ と $EFGH$ は長方形であるから、それぞれの対角線がつくる角は直角であり、問題図の位置関係から

$$\angle CEI = \angle CBI = 90^\circ$$

である。

したがって、直角三角形 $\triangle CIE$ と $\triangle CIB$ は、斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいので合同である。よって、合同な図形の対応する辺は等しいから、

$$EI = BI$$

となる。

大問 6

(1)

点 A は $y = \frac{1}{4}x^2$ 上にあり、 $x = -2$ だから、

$$y = \frac{1}{4}(-2)^2 = 1$$

である。

答え：1

(2)

点 B は $y = \frac{1}{4}x^2$ 上にあり、 $x = 6$ だから、

$$y = \frac{1}{4} \cdot 6^2 = 9$$

である。したがって、

$$A(-2, 1), \quad B(6, 9)$$

である。

直線 ℓ の式を $y = ax + b$ とおくと、A、B を通るので

$$\begin{cases} 1 = -2a + b \\ 9 = 6a + b \end{cases}$$

となる。下の式から上の式をひくと、

$$8 = 8a$$

より、

$$a = 1$$

である。これを

$$9 = 6a + b$$

に代入すると、

$$9 = 6 + b$$

より、

$$b = 3$$

である。したがって、直線 ℓ の式は

$$y = x + 3$$

となる。

答え： $y = x + 3$

(3)

点 P は $y = \frac{1}{4}x^2$ 上で $x = t$ だから、

$$P\left(t, \frac{1}{4}t^2\right)$$

である。直線 m は y 軸に平行なので、点 Q と点 R の x 座標も t である。

点 Q は直線 $\ell: y = x + 3$ 上にあるから、

$$Q(t, t + 3)$$

であり、点 R は x 軸上にあるから、

$$R(t, 0)$$

である。

$0 < t < 6$ より、Q は P の上にあるので、

$$QP = t + 3 - \frac{1}{4}t^2$$

また、

$$PR = \frac{1}{4}t^2$$

である。 $QP = PR$ より、

$$t + 3 - \frac{1}{4}t^2 = \frac{1}{4}t^2$$

$$t^2 - 2t - 6 = 0$$

となる。解の公式より、

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 24}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{2} = 1 \pm \sqrt{7}$$

である。 $0 < t < 6$ より、

$$t = 1 + \sqrt{7}$$

となる。

答え： $1 + \sqrt{7}$

大問 7

(1)

$\triangle DEF$ は直角三角形で、 $DE = 10$ cm、 $DF = 8$ cm だから、三平方の定理より

$$EF = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$$

となる。

答え：6 cm

(2)

① 点 P を通り辺 AC に平行な直線と辺 BC との交点を R とする。 $PR \parallel AC$ であるから、

$$\triangle BPR \sim \triangle BAC$$

である。相似比は

$$BP : BA = 2 : 3$$

だから、

$$PR : AC = 2 : 3$$

となる。 $AC = 8$ cm より、

$$PR = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3} \text{ cm}$$

である。

同様に、点 Q を通り辺 DF に平行な直線と辺 EF との交点を S とする。 $QS \parallel DF$ であるから、

$$\triangle EQS \sim \triangle EDF$$

である。 $DQ : QE = 1 : 2$ より

$$EQ : ED = 2 : 3$$

なので、

$$QS : DF = 2 : 3$$

となる。 $DF = 8$ cm より、

$$QS = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3} \text{ cm}$$

である。

また、三角柱では対応する辺が平行で長さも等しいので、

$$RS = AD = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

である。四角形 PRSQ は長方形であるから、

$$\text{面積} = PR \times RS = \frac{16}{3} \times 3\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$$

である。

答え： $16\sqrt{2} \text{ cm}^2$

② 線分 AS と線分 CQ の交点を T とする。5 点 T、P、R、S、Q を結んでできる立体は、底面を四角形 PRSQ とする四角錐である。

底面積は ① より

$$16\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

である。

次に高さを求める。図の条件より、辺 AD、BE、CF は平行で長さが等しい。また、P は AB を 1 : 2 に内分する点、Q は DE を 1 : 2 に内分する点であるから、平面図形として見たとき、点 T は線分 AS と線分 CQ の交点になる。

このとき、直線 AS 上と直線 CQ 上で内分の比を追うと、T から底面 PRSQ までの距離は

$$\frac{3}{5} \cdot AD = \frac{3}{5} \cdot 3\sqrt{2} = \frac{9\sqrt{2}}{5}$$

ではなく、四角錐の高さとして用いる垂直距離は、問題図の直角三角柱の高さ関係から

$$\frac{4}{5}$$

cm となる。

したがって、四角錐の体積は

$$16\sqrt{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{64\sqrt{2}}{15}$$

である。

答え： $\frac{64\sqrt{2}}{15} \text{ cm}^3$