

2024 年度

北海道

数学

解答・解説

KmKm の学習支援サイト

大問 1

問 1

(1) 与式を計算すると

$$-6$$

答え：-6

(2) 与式を計算すると

$$7 - 6 = 1$$

答え：1

(3) 与式を計算すると

$$\sqrt{18} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

答え： $2\sqrt{2}$

問 2

70 を素因数分解する。

$$70 = 2 \times 35 = 2 \times 5 \times 7$$

答え： $2 \times 5 \times 7$

問 3

1 m あたり 30 g なので、 x m では $30x$ g である。したがって、

$$y = 30x$$

答え： $y = 30x$

問 4

グラフは右下がりの直線であるから、傾き a は負の数である。また、 y 軸との交点は原点より上にあるので、切片 b は正の数である。

答え： a は負の数、 b は正の数

問 5

ヒストグラムと箱ひげ図を対応させる。

最大値に注目すると、①はウまたはエ、②はアまたはイ、③もアまたはイ、④はウまたはエに対応する。

次に、ウとエを比べると、エの方が四分位範囲が大きい。つまり、エの方がデータの散らばり具合が大きい。①と④では、①の方がデータの散らばり具合が大きいので、

$$\text{①} \rightarrow \text{エ}$$

となる。

また、アとイを比べると、アの箱の方が右寄りである。つまり、アの方が値の大きい方にデータが集まっている。②と③では、②の方が値の大きい方にデータが集まっているので、

② → ア

となる。

答え：①：エ， ②：ア

問 6

点 P は辺 BC 上にあり、 $\triangle ABP$ と $\triangle ACP$ の面積を等しくしたい。

この 2 つの三角形は、底辺をそれぞれ BP, CP と見ると、高さはどちらも点 A から直線 BC までの距離で等しい。したがって、面積を等しくするには

$$BP = CP$$

となればよい。

つまり、点 P は線分 BC の中点であればよいので、線分 BC の垂直二等分線を作図し、辺 BC との交点を P とする。

答え：線分 BC の垂直二等分線を作図する

大問 2

問 1

- (1) 白色のチューリップの縦の本数を a 本とする。

勇太さんのノートより、白色のチューリップは、縦に a 本ずつの列が左右にあり、横に $2a$ 本ずつの列が上下にある。ただし、四隅は重複して数えているので 4 本を引く。

$$a \times 2 + 2a \times 2 - 4 = 2a + 4a - 4 = 6a - 4$$

$a = 6$ を代入すると、

$$6 \times 6 - 4 = 36 - 4 = 32$$

答え：32 本

- (2) 白色のチューリップを、重ならないように分けて数える。

縦の列は、上下の角を除くとそれぞれ $a - 1$ 本で、左右に 2 列ある。横の列は、それぞれ $2a - 1$ 本で、上下に 2 列ある。したがって、白色のチューリップの本数を表す式は

$$(a - 1) \times 2 + (2a - 1) \times 2$$

である。

別の分け方をすると、左右の縦の列を $a - 2$ 本ずつ、上下の横の列を $2a$ 本ずつと見て、

$$(a - 2) \times 2 + 2a \times 2$$

としてもよい。

答え： $(a - 1) \times 2 + (2a - 1) \times 2$

- (3) 図の条件より、赤色のチューリップは、横に $2a - 2$ 本、縦に $a - 2$ 本並んでいるので、その本数は

$$(2a - 2)(a - 2)$$

である。

白色のチューリップの本数は

$$a \times 2 + 2a \times 2 - 4$$

であるから、全部のチューリップの本数は

$$a \times 2 + 2a \times 2 - 4 + (2a - 2)(a - 2)$$

となる。これを整理すると、

$$\begin{aligned} & 2a + 4a - 4 + (2a - 2)(a - 2) \\ &= 6a - 4 + 2a^2 - 6a + 4 \\ &= 2a^2 \end{aligned}$$

これが 242 本になればよいので、

$$2a^2 = 242$$

$$a^2 = 121$$

$a > 0$ より、

$$a = 11$$

したがって、赤色のチューリップの本数は

$$(2 \times 11 - 2)(11 - 2) = 20 \times 9 = 180$$

答え：180 本

大問 3

問 1

(1) 点 A は $y = x^2$ 上にあり、 $x = 3$ である。

$$y = 3^2 = 9$$

答え：9

(2) 点 B は $y = x^2$ 上にあり、 $x = -2$ である。

$$y = (-2)^2 = 4$$

よって、

$$A(3, 9), \quad B(-2, 4)$$

である。

直線 AB の式を $y = ax + b$ とおく。点 A, B を通るので、

$$9 = 3a + b \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$4 = -2a + b \quad \cdots \textcircled{2}$$

①から②を引くと、

$$5 = 5a$$

$$a = 1$$

これを①に代入して、

$$9 = 3 \times 1 + b$$

$$b = 6$$

したがって、直線 AB の式は

$$y = x + 6$$

答え： $y = x + 6$

問 2

$\triangle PQR$ は $\angle QPR = 90^\circ$ の直角二等辺三角形なので、

$$PQ = PR$$

である。

点 P は $y = 2x^2$ 上にあり、 $x = t$ なので、

$$P(t, 2t^2)$$

である。点 Q は点 P と y 軸について対称なので、

$$Q(-t, 2t^2)$$

である。

点 R は $y = \frac{1}{2}x^2$ 上にあり、 $x = t$ なので、

$$R\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$$

である。

したがって、

$$PQ = t - (-t) = 2t$$

$$PR = 2t^2 - \frac{1}{2}t^2 = \frac{3}{2}t^2$$

である。 $PQ = PR$ より、

$$2t = \frac{3}{2}t^2$$

$$4t = 3t^2$$

$$3t^2 - 4t = 0$$

$$t(3t - 4) = 0$$

$t > 0$ より、

$$t = \frac{4}{3}$$

答え： $\frac{4}{3}$

大問 4

問 1

四角形 $ABCD$ がひし形るとき、点 P, Q, R, S を各辺の中点としてとると、四角形 $PQRS$ はいつでも長方形になる。

ただし、長方形であるからといって、必ず正方形になるとは限らない。また、必ずひし形になるとも限らない。したがって、当てはまらないものは「正方形」と「ひし形」である。

答え：ア、ウ

問 2

(1) 四角形 $PQRS$ が平行四辺形であることを示す。

$\triangle APS$ と $\triangle ABD$ において、

$$AP : PB = AS : SD$$

であるから、

$$PS // BD$$

である。

また、 $\triangle CQR$ と $\triangle CBD$ において、

$$CQ : QB = CR : RD$$

であるから、

$$QR // BD$$

である。したがって、

$$PS // QR \quad \dots \textcircled{1}$$

さらに、

$$PS : BD = AP : AB = 1 : 4$$

より、

$$PS = \frac{1}{4}BD \quad \dots \textcircled{2}$$

同様に、

$$QR : BD = CQ : CB = 1 : 4$$

より、

$$QR = \frac{1}{4}BD \quad \dots \textcircled{3}$$

②、③より、

$$PS = QR \quad \dots \textcircled{4}$$

①、④より、1組の対辺が平行で長さが等しいので、四角形 $PQRS$ は平行四辺形である。

証明終わり

(2) 点 A から直線 BD に垂線を下ろし、その足を O とする。また、この垂線と直線 PS との交点を O' とする。

$\triangle APO'$ と $\triangle ABO$ において、 $PS \parallel BD$ より同位角が等しいので、

$$\angle APO' = \angle ABO$$

また、

$$\angle AO'P = \angle AOB = 90^\circ$$

である。よって、2組の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle APO' \sim \triangle ABO$$

である。

したがって、

$$AP : AB = AO' : AO$$

であり、 $AP : AB = 1 : 4$ だから、

$$AO' : AO = 1 : 4$$

よって、

$$AO' : O'O = 1 : 3$$

となる。

$\triangle APS$ と $\triangle MPS$ は、底辺を共通の PS と見ると、面積比は高さの比に等しい。したがって、

$$\triangle APS : \triangle MPS = AO' : O'O = 1 : 3$$

である。問題の条件より $\triangle APS = 3 \text{ cm}^2$ なので、

$$\triangle MPS = 9 \text{ cm}^2$$

四角形 $PMNS$ は平行四辺形であり、対角線 MS によって2つの三角形に分けられるので、

$$\text{四角形 } PMNS = 2 \times \triangle MPS$$

$$= 2 \times 9 = 18$$

答え：18 cm^2

大問 5

問 1

(1) 問題図より、図 1 は二等辺三角形で、頂角が 120° である。したがって、1 つの底角は

$$(180^\circ - 120^\circ) \div 2 = 60^\circ \div 2 = 30^\circ$$

である。

図 2 で、①を回転させて⑨に重ねることは、線分 AO を線分 EO に重ねることと同じである。中心のまわりの角は 30° ずつなので、

$$30^\circ \times 4 = 120^\circ$$

答え： 120°

(2) X, Y, Z の 3 回について、表裏の出方を樹形図で整理する。

$$\begin{aligned} X = \text{表} &\rightarrow Y = \text{表} \rightarrow \begin{cases} Z = \text{表}: \text{①} \\ Z = \text{裏}: \text{⑥} \end{cases} \\ &\rightarrow Y = \text{裏} \rightarrow \begin{cases} Z = \text{表}: \text{⑦} \\ Z = \text{裏}: \text{⑫} \end{cases} \\ X = \text{裏} &\rightarrow Y = \text{表} \rightarrow \begin{cases} Z = \text{表}: \text{⑫} \\ Z = \text{裏}: \text{⑦} \end{cases} \\ &\rightarrow Y = \text{裏} \rightarrow \begin{cases} Z = \text{表}: \text{⑥} \\ Z = \text{裏}: \text{①} \end{cases} \end{aligned}$$

全部で $2^3 = 8$ 通りあり、このうち条件を満たすのは 2 通りである。したがって、求める確率は

$$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

答え： $\frac{1}{4}$

問 2

点 J から KL に垂線を下ろし、その足を M とする。

$\triangle JKL$ は二等辺三角形なので、 M は KL の中点である。また、 $\angle KJL = 120^\circ$ より、

$$\angle KJM = 60^\circ$$

である。したがって、 $\triangle JKM$ は 30° - 60° - 90° の直角三角形である。

よって、

$$JM : JK : KM = 1 : 2 : \sqrt{3}$$

である。 $JK = 4 \text{ cm}$ だから、

$$JK : KM = 2 : \sqrt{3}$$

より、

$$2KM = 4\sqrt{3}$$

$$KM = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

したがって、

$$KL = 2KM = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

また、

$$JM : JK = 1 : 2$$

より、

$$JM = 2 \text{ cm}$$

である。よって、

$$\triangle JKL = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 2 = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

さらに、 $\triangle GKL$ は正三角形なので、

$$GK = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

である。点 H について、 $\triangle GHK$ で三平方の定理を使うと、

$$HK = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 4^2} = \sqrt{48 - 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

以上より、三角柱の体積は

$$4\sqrt{3} \times 4\sqrt{2} = 16\sqrt{6} \text{ cm}^3$$

答え： $16\sqrt{6} \text{ cm}^3$